كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : **الثامنة/نظري/**

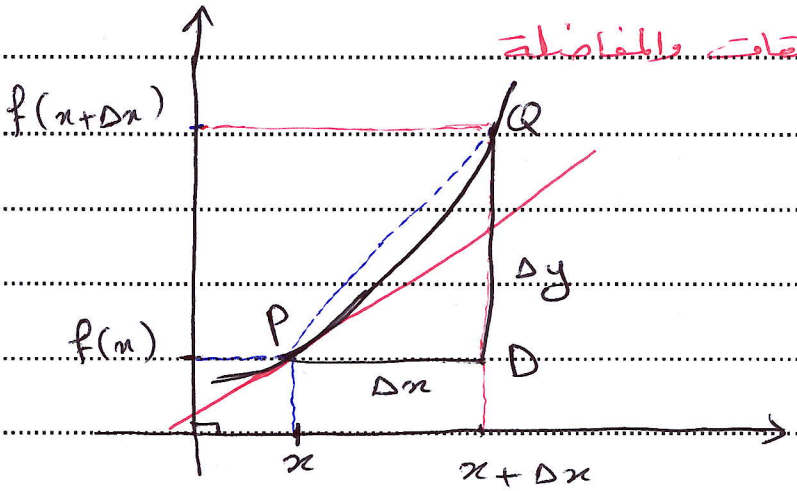
{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الاشتقاق والمفاضلة



نفرض أن النقطة $P(x, f(x))$ تقع على المنحني، ونفرض أن x أزيحت بمقدار Δx و y بمقدار Δy والنقطة Q التي لها الإحداثيات $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$

* الوتر PQ الذي ميله هو ظل الزاوية QPD أي أن

$$\text{ميل } PQ = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

* فإذا تحركت Q على المنحني باتجاه P وجدنا أن الوتر PQ يتحرك مقتربًا من المماس عند P، حتى إذا انطبقت النقطتان P و Q انطبق الوتر تمامًا على المماس عند P

* وقولنا أن النقطة Q قد آلت على P يكافئ قولنا أن Δy و Δx كلاهما يسعى إلى الصفر.

وكذلك قولنا أن ميل الوتر PQ آل إلى ميل المماس عند P هو قولنا بأن نهاية $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يسعى إلى ميل المماس m عند P حيث

$$m = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

فإنه يعرف مشتق التابع $f(x)$ والذي نرمز له بـ $f'(x)$

فإن $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

$$dy = f'(x)\,dx \quad *$$

نسمي dy تفاضل y و dx تفاضل x ومنه نعرف تفاضل تابع $y = f(x)$ بأنه مشتق التابع $f(x)$ مضروب بتفاضل المتحول المستقل x.

التابع المشتق:

ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I محتوى في X، ولتكن x_0 نقطة من I نقول أن l هو العدد المشتق للتابع f عند x_0 إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

① $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l$$

② $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

* عندئذ نقول f اشتقاقي عند x_0 ونرمز له بـ $l = f'(x_0)$

* عندما يكون f اشتقاقي عند كل نقطة من مجال I، نقول إن f اشتقاقي على I

مثال:

إذا كان التابع $f(x) = x^2 - 2x$

استخدم تعريف مشتق تابع لإيجاد $f'(2)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - 2x - x_0^2 + 2x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 - x_0^2) - 2(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} x + x_0 - 2 = 2x_0 - 2$$

$$f'(2) = 4 - 2 = 2$$

* القوانين الأساسية للاشتقاق:

(1) $\frac{d}{dx}(c) = 0$

(2) $\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

(3) $\frac{d}{dx}(c \cdot f) = c \cdot \frac{df}{dx}$

(4) $\frac{d}{dx}(f \mp g) = \frac{df}{dx} \mp \frac{dg}{dx}$

(5) $\frac{d}{dx}(f \cdot g) = f \cdot \frac{dg}{dx} + g \cdot \frac{df}{dx}$

(6) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

$f(x)$	$f'(x)$
$e^{g(x)}$	$g'(x) \cdot e^{g(x)}$
$\ln(g(x)) ; g(x) > 0$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$
$[g(x)]^n$	$n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$
$\sqrt{g(x)}$	$\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
$a^x = e^{x \ln a} ; a > 0$	$a^x \cdot \ln(a)$
$(h \circ g)(x)$	$h'(g(x)) \cdot g'(x)$

مثال: أوجد المشتق الأول لكل من التوابع الآتية:

① $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}$

② $f(x) = \left(\frac{3x+5}{2}\right)^5$

$\Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3x+5}{2}\right)^4$

③ $f(x) = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$

$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{-5}{2\sqrt{5x}}}{(\sqrt{5x})^2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{x}} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{5x})^3}$$

(4) $f(x) = (x^2+4)^2 (2x^3-1)^3$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \times 2x (x^2+4)(2x^3-1)^3 + 3 \times 6x^2 (2x^3-1)^2 (x^2+4)^2$$

$$= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2 [2(2x^3-1) + 9x(x^2+4)]$$

مثال: أثبت أن التابع $f(x) = x^2$ قابل للاشتقاق على المجال $[0,1]$

الحل:

إن $f(x) = x^2$ قابل للاشتقاق لكل $x_0 \in (0,1)$ لأن

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2x_0$$

حيث

$$0 < x_0 < 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

إذاً التابع $f(x) = x^2$ قابل للاشتقاق على المجال $[0,1]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مشتق التوابع العكسية:

* التابع $y = f(x)$ معرف ومستمر ومطرد تماماً على I، عندئذ يوجد له تابع عكسي.

* التابع في نقطة x_0 من المجال I مشتق محدود $f'(x_0)$ ومغاير للصفر.

عندئذ يوجد في النقطة المقابلة $y_0 = f(x_0)$

مشتق التابع العكسي $f^{-1}(y_0)$ معرف بالعلاقة

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

مشتق التابع $y = \arcsin x$

$$y = \sin^{-1} x = f^{-1}(x)$$

$$x = \sin y = f(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

وعموماً:

إذا كان $u = u(x)$ فإن

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مشتقات التوابع المثلثية العكسية:

y	$\frac{dy}{dx}$
$\cos^{-1}x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\lvert x\rvert<1$
$\cos^{-1}u$	$\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$; $\lvert u\rvert<1$
$\tan^{-1}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\tan^{-1}u$	$\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$
$\cot^{-1}x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\cot^{-1}u$	$\frac{-1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$

مثال: أوجد $y'=\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي:

(1) $y=\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\times\frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{dx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\times\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② $y = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)$

$$y' = \frac{1}{a.b}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\tan x\right)^2}\times\frac{d\left(\frac{b}{a}\tan x\right)}{dx}$$

$$= \frac{1}{a.b}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2+\tan^2 x}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x\,(a^2+b^2\tan^2 x)}$$

مشتقات التوابع القطعية :

$$* \frac{d}{dx}(\sh u) = u'.\ch u$$

$$*(\ch u)' = u'.\sh u$$

$$*(\th u)' = u'.\frac{1}{\ch^2 u}$$

$$*(\cth u)' = u'\left(\frac{-1}{\sh^2 u}\right)$$

مشتقات التوابع القطعية العكسية :

$$*(\sh^{-1}u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$*(\ch^{-1}u)' = u'.\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* $(\text{th}^{-1}u)' = u' \cdot \frac{1}{1-u^2}$

* $(\text{cth}^{-1}u)' = u'\left(\frac{-1}{1-u^2}\right)$

مثال:

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ للتوابع الآتية:

(1) $y = \ln(\text{ch}x)$

$y' = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \text{th}x$

(2) $y = \sqrt{\sin x + \text{sh}x}$

$y' = \frac{\cos x + \text{ch}x}{2\sqrt{\sin x + \text{sh}x}}$

(3) $y = \text{sh}^{-1}(\sqrt{x})$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

(4) $y = (x^2 \cdot \text{ch}^{-1}x)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}\left(2x \cdot \text{ch}^{-1}x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right) \cdot (x^2 \text{ch}^{-1}x)^{-\frac{1}{2}}$

التفاضل الضمني:

نحل المعادلة $f(x,y) = 0$ بالنسبة لـ y إذا أمكن ثم نفاضل بالنسبة لـ x أو باعتبار أن y تابع للمتحول x نفاضل المعادلة المعطاة بالنسبة لـ x ونحل المعادلة الناتجة بالنسبة لـ $\frac{dy}{dx}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وعملية التفاضل هذه تسمى بالتفاضل الضمني

مثال:

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات الآتية:

① $xy + x - 2y = 1$

نفاضل بالنسبة لـ x

$$y + x\frac{dy}{dx} + 1 - 2\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y + 1 = (2-x)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{2-x}$$

② $xy^2 + y^3 - x + y = 0$

$$y^2 + 2xy\cdot\frac{dy}{dx} + 3y^2\cdot\frac{dy}{dx} - 1 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3y^2 + 2xy + 1)\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{3y^2+2xy+1}$$

مشتقة توابع معطاة بالشكل الوسيطي:

في بعض الأحيان تكون المعادلة التابعية التي تربط التابع بمتغيره ليس على الشكل الصريح أو الضمني بل تتعين علاقتهما من ارتباط كل منهما بمتغير ثالث يسمى وسيط. فإذا فرضنا أن $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ تابعان قابلان للاشتقاق في مجال ما حيث t وسيط فيكون

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$$

مثال:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في الحالات الآتية:

① $x = 2t + 5, \quad y = 9t^2 + 2$

$$\frac{dy}{dt} = 18t, \quad \frac{dx}{dt} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{18t}{2} = 9t$$

② $x = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad y = \sqrt{1+t^2}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{2(\sqrt{t})^3}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{-2t^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{1+t^2}}$$

قاعدة أوبيتال:

تفيد في دراسة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة:

إذا كان f و g تابعين مابلين للاشتقاق في جوار النقطة x_0 و

يحققان الشرطين التاليين:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

على الأقل إحدى النهايتين

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_0} g(x)$$

غير معدومة ولتكن مثلاً $\lim_{x \to x_0} g'(x) \neq 0$ فإن

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال:

① $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0}$

⇐ حسب أو بتال

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

② $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$

⇐ حسب قاعدة أو بتال

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$$

③ $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$

⇐ حسب أو بتال

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty$$

مبرهنة:

إذا كان f و g تابعان قابلين للاشتقاق على جوار x_0 يحققان الشرطين التاليين:

1) التابعان يسعيان معاً نحو $+\infty$ أو نحو $-\infty$ عندما $x \to x_0$ (حيث x_0 يمكن أن يكون $\mp\infty$) أي

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \cap \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

2) على الأقل إحدى النهايتين $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ ، $\lim_{x\to x_0} g'(x)$ محدودة فإن:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال:

1) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

صيغة أوبتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

صيغة أوبتال

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{\infty}{\infty}\quad\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$$

ملاحظة:

(1) إذا كانت النهاية $\frac{f'}{g'}$ من أحد الشكلين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ فإننا نستطيع أن نطبق قاعدة أوبيتال من جديد بالنسبة لـ $\frac{f'}{g'}$ وهكذا

(2) قاعدة أوبيتال غير قابلة للعكس، أي إذا وجدت نهاية القسمة $\frac{f}{g}$ فليس بالضرورة بشكل عام أن توجد نهاية للتابع $\frac{f'}{g'}$

على سبيل المثال:

$$f(x)=x+\sin x\ ,\ g(x)=x$$

عندما $x\to\infty$ فإن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

بينما لا توجد نهاية للتابع $\frac{f'}{g'}$ عندما $+\infty$

* من الممكن الاستفادة من قاعدة أوبيتال في حساب نهايات التوابع في نقطة ما بما فيها $\pm\infty$ وذلك عند حالات عدم التعيين المختلفة نميز منها:

(1) حالة $0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\quad\&\quad\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f.g=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{0}{0}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أو $\lim_{x\to x_0} \frac{g}{\frac{1}{f}} = \frac{\infty}{\infty}$

مثال:

$\lim_{x\to 0} \tan x \cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \cdot \infty$

باستخدام قاعدة أو سيال

(من الأسهل وضع اللوغاريتم في البسط)

$\lim_{x\to 0} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{\tan x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2}{x^3} \Big/ \frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times 2\sin x$

$= 1 \times 0 = 0$

2. حالة $\infty - \infty$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to x_0} f - g = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}} = \frac{0}{0}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\infty-\infty$$

باستخدام أوبيتال

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{\frac{(\ln(x))\cdot(x-1)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{\ln x\cdot(x-1)}=\frac{0}{0}$$

أوبيتال

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}$$

نطبق أوبيتال مرة ثانية

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}$$

---

3 الحالة $(0)^0$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0 \quad \& \quad \lim_{x\to x_0}g(x)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f)^g=\lim_{x\to x_0}e^{g\cdot\ln(f)}$$

نوجد

$$\lim_{x\to x_0}g\cdot\ln(f)=B$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f)^g = e^B$$

مثال:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \to 0^+} e^{\sin x \cdot \ln(x)}$$

$$= e^{\lim_{x \to 0^+} \sin x \cdot \ln(x)}$$

نوجد $\lim_{x \to 0^+} \sin x \ln(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$$

أو بيتال

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} e^{\sin x \cdot \ln(x)} = e^0 = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4) الحالة 1^{∞}

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \quad \& \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} (f)^g = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln(f)}$$

$$= e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln(f)}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

$$* \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot \ln(1+x) = \frac{0}{0}$$

نطبق أو بيتال

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

5) الحالة ∞^0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \& \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln(f(x))}$$

$$* \quad \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln(f(x)) = 0\cdot\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \ln(f(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{\ln(f(x))}{\frac{1}{g(x)}}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{[\ln(f(x))]'}{\frac{1}{(g(x))'}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

$$* \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \ln x = 0\cdot\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

يمكن الحل بالأسلوب

$$\frac{1}{x}\ln x = \frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\infty}{\infty}$$

ثم نستخدم أوبتال

* نشر تابع $f(x)$ المعرف والقابل للاشتقاق من مراتب عليا في جوار x_0

منشور تايلور

يعرف بالصيغة الآتية في جوار النقطة x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n$$

بحيث R_n يمثل باقي المنشور

لامتناهي في الصغر في جوار النقطة x_0

مثال:

أوجد منشور التابع $f(x) = \sin x$ بجوار $x = \pi$ مكتفيا بثلاث حدود من المنشور غير معدومة

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(\pi) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(\pi) = -1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(\pi) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(\pi) = 1$$

$$f''''(x) = \sin x \Rightarrow f''''(\pi) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{5}(\pi) = -1$$

$$\Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x-x_0)^5$$

$$\Rightarrow f(x) \approx -(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(x-\pi)^5$$

منشور مالك لوران

وهو حالة خاصة من منشور تايلور في جوار $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + Rn$$

مثال: أوجد منشور مالك لوران للتابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ مكتفياً بثلاثة حدود غير معدومة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

منشور ماك لوران ⇐ $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(0) = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$\Rightarrow f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$= 1 - x + x^2$$

مثال: أوجد منشور ماك لوران للتابع $f(x) = e^x$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$$

بالتالي يكون منشور ماك لوران لهذا التابع بالشكل

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ملاحظة:

لإيجاد منشور التابع $f(x) = e^{-x}$ نعوض في منشور التابع $f(x) = e^x$ كل x بـ $-x$ فنجد

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

ملاحظة:

من منشور ماك لوران للتابعين e^x و e^{-x} نستنتج منشور ماك لوران للتابعين Shx و chx

* $$Shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\Rightarrow Shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

* $$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\Rightarrow chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

مثال:

أوجد الحدود الأربعة الأولى غير المعدومة لمنشور ماك لوران للتابع

$$f(x) = (x+1)\ln(2+x)$$

$$f(0) = \ln 2$$

* $$f'(x) = \ln(2+x) + \frac{x+1}{2+x}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \ln 2 + \frac{1}{2}$$

*
$$f''(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{2+x-x-1}{(2+x)^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{(2+x)^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow f''(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$* f''(x) = \frac{-1}{(2+x)^2} - \frac{2}{(2+x)^3}$$

$$\Rightarrow f'''(0) = \frac{-1}{4} - \frac{2}{8} = \frac{-1}{2}$$

$$f(x) \simeq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$= \ln 2 + \frac{(\ln 2 + \frac{1}{2})}{1!}x + \frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3!}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z