كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

سطوح الدرجة الثانية:

السطح: هو المحل الهندسي لنقط الفراغ التي تحقق خاصة معينة تسمى الخاصة المميزة لهذا السطح.

مثلاً:

السطح التالي:

$$x^2+y^2+z^2=4$$

هي معادلة سطح كروي والخاصة المميزة لهذا السطح هي أن مجموع مربعات المتحولات x, y, z تساوي مقداراً ثابتاً.

سنبدأ معادلة السطح من الدرجة الثانية بشكل مفصل ونقدم أهم الأشكال عليها وهي مجسمات القطوع والكرة.

* معادلة السطح من الدرجة الثانية

$$S(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2$$
$$+b_1xy+b_2yz+b_3xz+c_1x+c_2y+c_3z+d=0$$

تمثل المعادلة السابقة معادلة سطح من الدرجة الثانية

حيث a_i, b_i, c_i, d ثوابت حقيقية $(i=1,2,3)$

* تسمى المحاور الثلاثة الأولى بالمحاور المرتبة والمحاور الثلاثة الثانية بالمحاور المتممة

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

أمّا الحدود التي تأتي المتطابقة تسمى الحدود الخطية و أ الحد الثابت

* يمكن حذف الحدود المتطابقة أو الخطية للحصول على المعادلة المختزلة للسطح من الدرجة الثانية

وذلك بإنشاء أو دوران مناسبين لجملة الإحداثيات

فنحصل على

$$Ax^2 + By^2 + cz^2 + D = 0 \quad \boxed{1}$$

حيث الثوابت الحقيقية

A و B و c و D غير معدومة

مجسمات القطوع

١- مجسم القطع الناقص:

إذا كانت الثوابت الحقيقية في المعادلة [1] A و B و c من إشارة واحدة ومخالفة لإشارة D فإننا نستطيع كتابتها بالشكل

$$\frac{x^2}{-D/A} + \frac{y^2}{-D/B} + \frac{z^2}{-D/c} = 1$$

بما أن المقامات موجبة دوماً فرضاً فإننا نكتب المعادلة السابقة بالشكل:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

حيث:

$$a^2 = -\frac{D}{A}, \quad b^2 = -\frac{D}{B}, \quad c^2 = -\frac{D}{c}$$

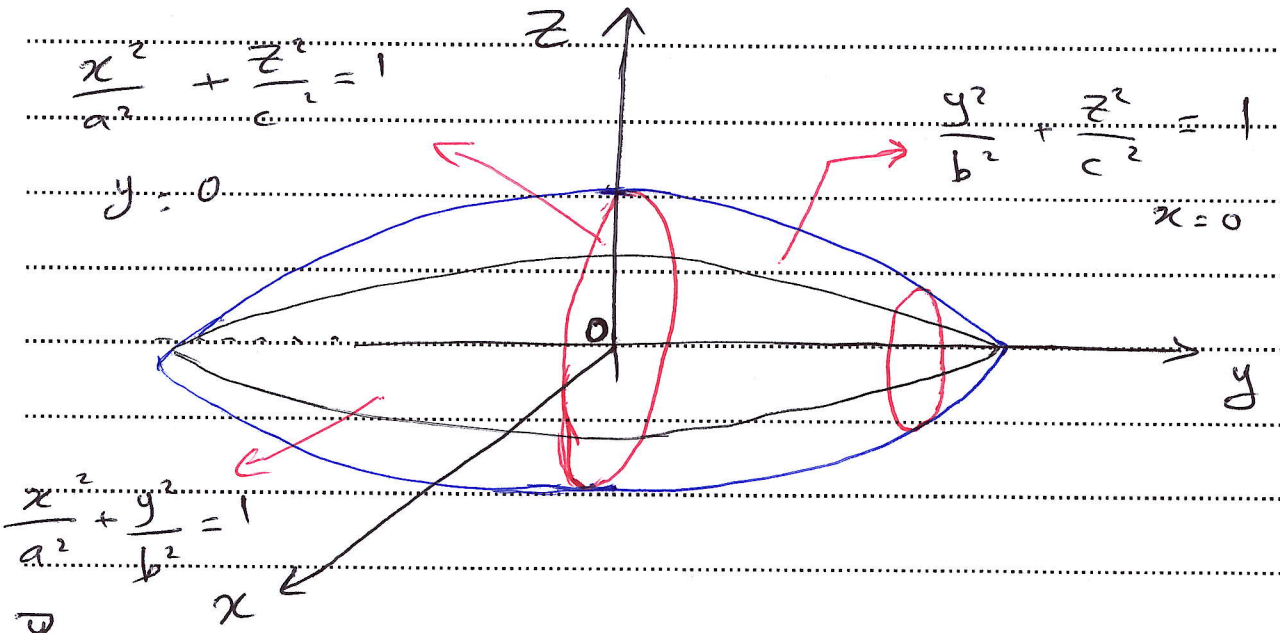
TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وهي تمثل معادلة مجسم قطع ناقص مركزي ونسب التوابث

a و b و c

أنصاف محاور مجسم القطع الناقص وهي تمثل أطوال القطع التي يقطعها

المجسم (مجسم القطع الناقص) مع المحاور الإحداثية



مثال: عين نوع السطح المعرف بالمعادلة

$$4x^2 + 25y^2 + 50z^2 - 100 = 0$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$$

A = 4
B = 25
C = 50
D = 100

معادلة مجسم قطع ناقص مركزي أنصاف محاوره هي

$a = 5$ ، $b = 2$ ، $c = \sqrt{2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خواص مجسم القطع الناقص:

1- مبدأ الإحداثيات هو مركز تناظر المجسم القطع الناقص المركزي.

2- إذا كانت أنصاف المحاور a، b، c متساوية فإن مجسم القطع الناقص يتحول إلى كرة مركزية

معادلتها

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

3- المحاور الإحداثية هي محاور تناظر لمجسم القطع الناقص

4- المستويات الإحداثية هي مستويات تناظر لمجسم القطع الناقص

5- إذا تساوى محوران من محوريه

مثلاً: $a=b$ ينتج لدينا مجسم القطع الناقص

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

والمتمثل مجسم القطع الناقص الدوراني حول oz

وإذا كانت $c=b$ كان مجسم القطع الناقص الدوراني حول ox

" " " $a=c$ " " " " " " " " حول oy

6- المسألة:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

معادلة مجسم قطع ناقص مركزه (x_0,y_0,z_0)

ومحاوره التناظرية توازي المحاور الإحداثية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

7- اذا كانت الثوابت A و B و C و D في المعادلة (1)
مغايرة للصفر من اشارة واحدة فإن المعادلة (1) تكتب بالشكل:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{c^2}{z^2}=-1$$

وهي معادلة مجسم قطع ناقص معقد (وهمي)

مثال: عين نوع السطح المعرف بـ:

$$x^2+4y^2+9z^2-6x+36z=99$$

$$x^2-6x+4y^2+9z^2+36z=99$$

$$(x-3)^2+4y^2+9(z^2+4z)=99$$

$$(x-3)^2+4y^2+9(z+2)^2=99+36+9$$

$$(x-3)^2+4y^2+9(z+2)^2=144$$

$A=1$

$B=4$

$C=9$

$D=-144$

نكتب بالشكل:

$$\frac{(x-3)^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{(z+2)^2}{16}=1$$

معادلة مجسم قطع ناقص دوراني أو ضلعي محوره

$a=12,\ b=6,\ c=4$

ومركز تناظره $(3,0,-2)$

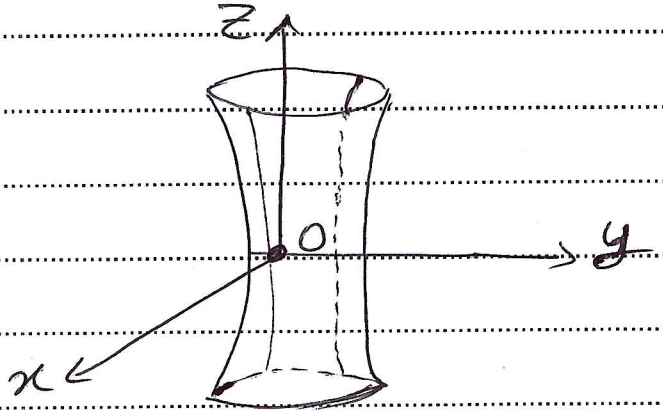
TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مجسم القطع الناقص :

إذا كانت الثوابت A , B , C , D في المعادلة (1) أعداداً حقيقية موجبة تماماً حيث الصفر كان لـ A و B إشارة تغايرها بينما C إشارة مخالفة لـ A و B بالتالي نأخذ المعادلة النموذجية للسطح كالشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

وتسمى المعادلة النموذجية لمجسم القطع الزائد وحيد الفرع

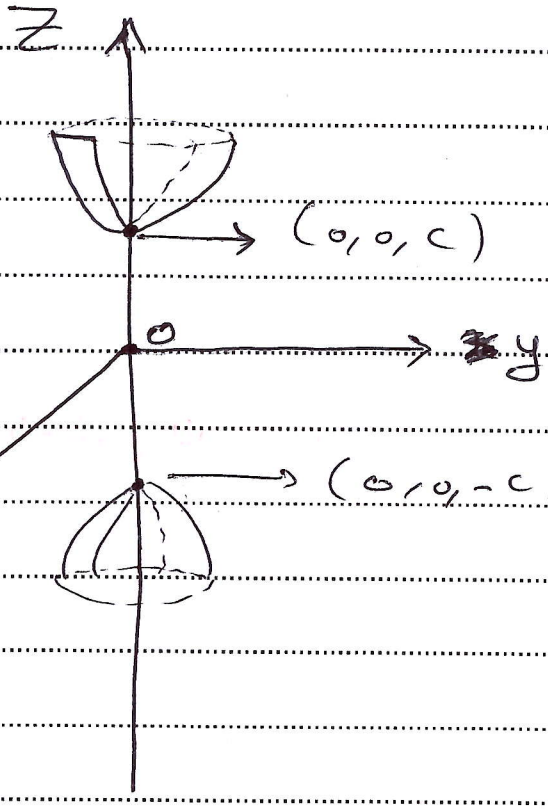


إن هذا المجسم متناظر بالنسبة لكل المستويات الإحداثية والمحاور الإحداثية ومبدأ الإحداثيات

وهنالك نوع آخر من مجسمات القطوع الزائدة ذو الفرعين وهو عبارة عن سطح من الدرجة الثانية معادلته

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



حالة خاصة:

اذا كان $a=b$

فإن مجسم القطع الزائد ذو مزعين دورانيين معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

مثال:

عين نوع السطح المعرف بالمعادلة:

$$36x^2-9y^2-16z^2+36y+32z-196=0$$

الحل:

$$36x^2-9(y-2)^2-16(z-1)^2=144$$

$A=36 \quad C=-16$

$B=-9 \quad D=-144$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} + \frac{(z-1)^2}{9} = 1$$

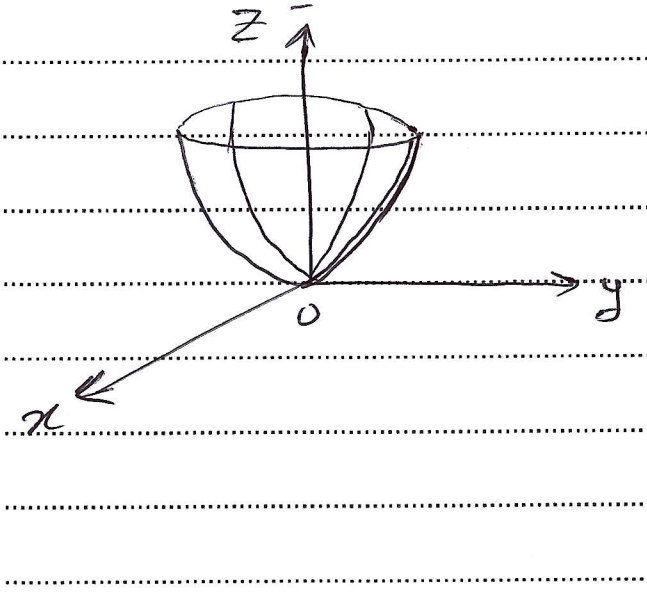
معادلة مجسم قطع زائد ذي مربعين مركز تناظره $(0,2,1)$

ومنصف محوره القاطع $z=2$

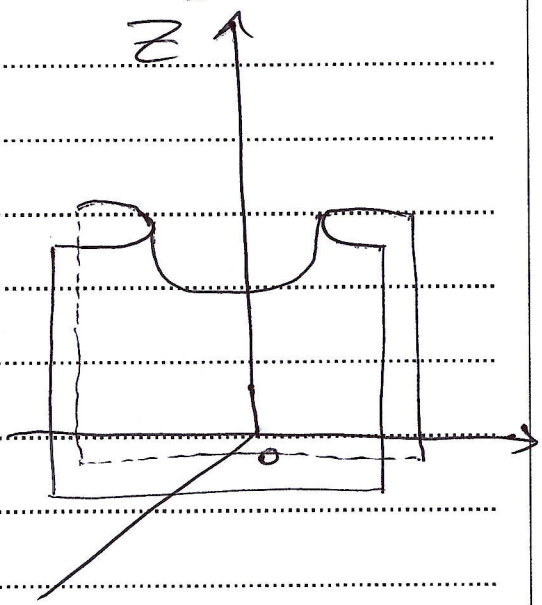
مجسمات القطوع المكافئة

يوجد نوعان من هذه المجسمات:

مجسم قطع مكافئ ناقص



مجسم قطع مكافئ زائدي



* يعرّف مجسم القطع المكافئ الناقص من خلال معادلته التالية:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 2z$$

p و q عددان موجبان

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وهو مجسم متناظر بالنسبة للمستويين الإحداثيين oxz , oyz والمحور oz وهذا المجسم موجود بأكمله في جهة واحدة من المستوى oyz وذلك لأن $z \geq 0$

نسمي المحور oz محور المجسم و النقطة o ذروة المجسم

أما مجسم القطع المكافئ الزائدي هو سطح من الدرجة الثانية ومعادلته

$$\frac{x^2}{a^2} \ominus \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

حيث a و b موجبان

ويتصف بأنه مجسم متناظر بالنسبة للمستويين

oxz و oyz

والمحور oz.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة