كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : **السادسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

حالة خاصة:

نفرض أن L_1 و L_2 مستقيمان في الفراغ معرفان بالشكل

$$L_1:\begin{cases} P_1 = P_1x + q_1y + r_1z + d_1 = 0 \\ P_2 = P_2x + q_2y + r_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases} P_3 = P_3x + q_3y + r_3z + d_3 = 0 \\ P_4 = P_4x + q_4y + r_4z + d_4 = 0 \end{cases}$$

لإيجاد أقصر بعد بين L_1 و L_2

نوجد جملة المستويات المارة بـ L_2 (P_4, P_3) قاعدة لها ونأخذ منها المستوي الموازي لـ L_1

ثم نحسب بعد L_1 عن المستوي بالتالي أقصر بعد بين المستقيمين

هو بعد نقطة من أحدهما عن مستوٍ من مستويات جملة المستقيم الآخر (الذي يوازي الأول)

مثال:

أوجد أقصر بعد بين المستقيمين

$$L_1:\begin{cases} P_1: x + y - 2 = 0 \\ P_2: x - z + 4 = 0 \end{cases}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$L_2 : \begin{cases} P_3 : x - y + z + 3 = 0 \\ P_4 : 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$$

لإيجاد أي مستوي نصبح حزمة المستويات المارة بـ L_2

$$P(\lambda) = P_3 + \lambda P_4$$

$$= (1+2\lambda)x - y + (1-\lambda)z + 3 + 5\lambda = 0$$

نختار منها مستوياً يوازي L_1 أي يكون $\vec{v_{L_2}} \perp \vec{N_1}$

$$\vec{v_{L_2}} = \vec{n_1} \cap \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1)$$

$$\vec{v_{L_2}} \cdot \vec{N_1} = 0 \Rightarrow$$

$$-(1+2\lambda) - 1 - 1 + \lambda = 0$$

$$-\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3}$$

ومنه المستوي المار بـ L_2 ويوازي L_1 هو

$$P(-3) : -5x - y + 4z - 12 = 0$$

نختار نقطة من L_1

نفرض $x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 5$

$M_1(1, 1, 5) \in L_1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$dist(M_1, Q) = \frac{|1-5-1+20-12|}{\sqrt{25+1+16}}$$

تقاطع مستقيم ومستوٍ:

نميز ثلاث حالات:

1) عندما $\vec{N}.\vec{V}=0$

$\vec{V}$ شعاع توجيه المستقيم L

$\vec{N}$ ناظم المستوي P

إذاً $(L \parallel P)$

المستوي يوازي المستقيم

حالة خاصة:

المستقيم منطبق على المستوي

عندما $(P \parallel L)$ وتنتمي إحدى نقاط L إلى المستوي P

2) المستقيم يعامد المستوي:

عندما $\vec{N} \parallel \vec{V}$ ((ارتباط خطي))

3) المستقيم يقطع المستوي بنقطة

ليكن المستوي P يعطى بالشكل

$$P: Px+qy+rz+d=0$$

والمستقيم معطى بالشكل الديكارتي

$$L: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

حيث $\vec{V}(a,b,c)$

عندئذٍ لإيجاد نقطة التقاطع نكتب L بالشكل الوسيطي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$L: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

نعوض التمثيل الوسيطي بمعادلة المستوي p لنوجد t ثم نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ L لنوجد (x,y,z) إحداثيات نقطة التقاطع

مثال:

عين نقطة تقاطع المستوي مع المستقيم L

$$L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$$

$$P: 2x + 3y + z - 1 = 0$$

الحل:

نكتب L بالشكل الوسيطي

$$L: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 6t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

نعوض التمثيل الوسيطي في P

$$2(1+t) + 3(-1-2t) + 6t - 1 = 0$$

$$2t - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 1}$$

إحداثيات نقطة التقاطع

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = 6 \end{cases} \quad M(2, -5, 6)$$

حالة خاصة:

إذا كان المستقيم مطرح كفصل مشترك للمستويين التاليين:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$L: \begin{cases} P_1 : p_1x + q_1y + r_1z + d_1 = 0 \\ P_2 : p_2x + q_2y + r_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

لدراسة التقاطع مع P

$$P : px + qy + rz + d = 0$$

نحل جملة المعادلات P_1, P_2, P حل مشترك لنحصل على الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

المستويات (جملة المعادلات) لا تملك حل:

(المستقيم يوازي المستوي)

الحالة الثانية:

المستويات تملك عدد لانهائي من الحلول متقاطعان بفصل مشترك

(المستقيم محتوى في المستوي)

الحالة الثالثة:

المستويات متقاطعة بنقطة وحيدة

(المستقيم يقطع المستوي بنقطة)

التعامد:

أ- نظير نقطة بالنسبة لمستقيم

نقول عن نقطتين M_1 و M_2 أنهما متعامدتين بالنسبة للمستقيم L

① إذا كان

$\overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{v}$

أي $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{v} = 0$

② إذا كان منتصف M_1M_2 ينتمي إلى المستقيم نحل جملة المعادلتين ① و ② حل مشترك نحصل على إحداثيات M_2 نظيرة M_1 بالنسبة لـ L

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

ليكن المستقيم L الممثل بالشكل

$$L: \begin{cases} P_1: x - y - 4z + 12 = 0 \\ P_2: 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

أوجد نظيرة $M_1(4,1,6)$ بالنسبة لـ L

الحل:

نفرض $M_2(x_2, y_2, z_2)$ نظيرة $M_1(4,1,6)$ بالنسبة لـ L

① $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \overrightarrow{L}$

② $M \in L$ منتصف (M_1, M_2)

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = (6, -6, 3)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - 4, y_2 - 1, z_2 - 6)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

$$6x_2 - 6y_2 + 3z_2 - 36 = 0 \quad (1)$$

ليكن (M_1M_2) منتصف

$$\left(\frac{4+x_2}{2}, \frac{1+y_2}{2}, \frac{6+z_2}{2}\right) \in L$$

نحقق المعادلتين P_1 و P_2 نعوض

$$P_1: \frac{4+x_2}{2} - \frac{1+y_2}{2} - 4\left(\frac{6+z_2}{2}\right) + 12 = 0$$

نضرب المعادلة بـ ②

$$x_2 - y_2 - 4z_2 + 3 = 0 \quad (2)$$

$$P_2: 2\left(\frac{4+x_2}{2}\right) + \left(\frac{1+y_2}{2}\right) - 2\left(\frac{6+z_2}{2}\right) + 3 = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$2x_2 + y_2 - 2z_2 + 3 = 0$ (3)

بحل جملة المعادلات ① و ② و ③ نحصل على إحداثيات $M_2(x_2, y_2, z_2)$ نظيرة M_1 بالنسبة للمستقيم L

$M_2(2, -3, 2)$

ملاحظة

نظير مستوٍ بالنسبة إلى مستقيم

ليكن المستقيم L الممثل بالفصل المشترك التالي

$$L: \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

أوجد نظير المستوي

$$P: x + y - 2z + 1 = 0$$

مسقط مستقيم على مستوٍ:

لتعيين مسقط المستقيم L الممثل بالمعادلة:

$$L: \begin{cases} P_1: p_1x + q_1y + r_1z + d_1 = 0 \\ P_2: p_2x + q_2y + r_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

على المستوي P المعطى بالشكل

$$P: px + qy + rz + d = 0$$

① نعين المستوي Q وذلك بتشكيل حزمة المستويات المارة بـ L ونختار منها Q المستوي العامد لـ P

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② مسقط على P هو الفصل المشترك لـ P و Q

$$L' = \begin{cases} P: \\ Q: \end{cases}$$

مثال:

أوجد معادلة مسقط المستقيم L

$$L: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1}$$

① ② ③

على المستوي

$$P: x+2y+3z+4=0$$

الحل:

نكتب L على شكل تقاطع مستويين من ① و ②

$$4(x-2) = 3(y+2)$$

$$P_1: 4x-3y-14=0$$

من ① و ③

$$x-2 = 3z-3$$

$$P_2: x-3z+1=0$$

$$L: \begin{cases} P_1: 4x-3y-14=0 \\ P_2: x-3z+1=0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نكتب معادلة المستويات المارة بـ L

$P(\lambda) = P_1 + \lambda P_2$

$= (4+\lambda)x - 3y - 3\lambda z - 14 + \lambda = 0$

نختار منها المستوي المعامد لـ P

$\overrightarrow{NP}\ (1,2,3)$ ، $\overrightarrow{N\lambda} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$

$4 + \lambda - 6 - 9\lambda = 0$

$-8\lambda = 2$

$\boxed{\lambda = -\frac{1}{4}}$

$P\left(-\frac{1}{4}\right) = Q : \frac{15}{4}x - 3y + \frac{3}{4}z - 14 - \frac{1}{4} = 0$

$L' : \begin{cases} P : \text{---} \\ Q : \text{---} \end{cases}$