كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الفضاءات المتجهية (الشعاعية)

نعين بفقه: $\mathbb{R}$

ليكن الحقل $(K, +, \cdot)$

إذا عرّفنا V وعرّفنا عليها العمليتين $\cdot$ و $\oplus$ حيث $\oplus$ ما نود تشكيل داخلي ونسميه الجمع أي $(\lambda, k \in K : \lambda + k \in K)$

$\cdot$ ما نود تشكيل خارجي ونسميه الضرب $(\lambda \in K, \vec{u} \in \vec{V} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{u} \in V)$

فنقول أن $(V, \oplus, \cdot)$ تشكل فضاء شعاعي فوق الحقل K إذا تحققت الشروط التالية:

الشرط الأول:

1) $(V, \oplus)$ زمرة تبديلية أي

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$:

1) $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$

2) $(\vec{u} + \vec{v}) \oplus \vec{w} = \vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w})$

3) $\vec{u} \oplus \vec{0} = \vec{0} \oplus \vec{u} = \vec{u}$

4) $\vec{u} \oplus (-\vec{u}) = (-\vec{u}) \oplus (\vec{u}) = \vec{0}$

الشرط الثاني:

$\forall \lambda, k \in K, \vec{u}, \vec{v} \in V$

: 1) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

2) $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} \oplus \lambda \cdot \vec{v}$

3) $(\lambda + k) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \oplus k \cdot \vec{v}$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

④ $1 \odot (k \odot \vec{u}) = (1 \odot k) \odot \vec{u}$

ملاحظة:

من أجل السهولة

سوف نستخدم + بدل من ⊕

. بدل من ⊙

نتائج:

$\overline{V}$ k R R (-1

R فضاء شعاعي فوق R

بالنسبة لعمليتي الضرب والجمع المألوفتين

R^2 (-2

R فضاء شعاعي فوق R

وذلك بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين بالشكل:

①

$\forall \vec{V_1} = (x_1, y_1)$, $\vec{V_2} = (x_2, y_2)$

$\vec{V_1} + \vec{V_2} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

②

$\forall \lambda \in R ; \vec{u} (x, y)$

$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda x , \lambda y)$

① $(R^2 , +)$ زمرة تبديلية وذلك لأن

① $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$

② $(\vec{V_1} + \vec{V_2}) + \vec{u} = \vec{V_1} + (\vec{V_2} + \vec{u})$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(x_1+x_2, y_1+y_2)+(x,y) = (x_1,y_1)+(x_2+x, y_2+y)$

$(x_1+x_2+x, y_1+y_2+y) = (x_1+x_2+x, y_1+y_2+y)$

(3) $\vec{u}+(0,0) = (0,0)+\vec{u} = \vec{u}$ $\quad \vec{0}$

(4)

(1) لكل $\vec{u}(x,y)$ نظير بالنسبة للجمع وهو $\vec{u'}(-x,-y)$ لأن

$\vec{u}+\vec{u'} = \vec{u'}+\vec{u} = (0,0) = \vec{0}$

(2)

$\forall \lambda, k \in R$:

$\vec{u_1}(x_1,y_1), \vec{u_2}(x_2,y_2) \in R^2$

(1') $1 \cdot \vec{u_1} = \vec{u_1}$

$1\cdot(x_1,y_1) = (x_1,y_1)$

محققة $(x_1,y_1) = (x_1,y_1)$

(2'') $\lambda\cdot(\vec{u_1}+\vec{u_2}) \stackrel{?}{=} \lambda\vec{u_1}+\lambda\vec{u_2}$

$\underbrace{\lambda\cdot(\vec{u_1}+\vec{u_2})}_{L_1} \quad \underbrace{\lambda\vec{u_1}+\lambda\vec{u_2}}_{L_2}$

$L_1 = \lambda\cdot((x_1,y_1)+(x_2,y_2))$

$L_1 = \lambda\cdot(x_1+x_2, y_1+y_2) = (\lambda(x_1+x_2), \lambda(y_1+y_2))$

$= (\lambda x_1+\lambda x_2, \lambda y_1+\lambda y_2)$

$= (\lambda x_1, \lambda y_1)+(\lambda x_2, \lambda y_2)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= \lambda(x_1, y_1) + \lambda(x, y)$

$= \lambda \vec{u_1} + \lambda \vec{u_2} = l_2$

(3)''

$\underbrace{(\lambda + k) \cdot \vec{u}}_{l_1} = \underbrace{\lambda \vec{u_1} + k \vec{u}}_{l_2}$

$l_1 = (\lambda + k) \cdot (x_1, y_1)$

$= ((\lambda + k) x_1, (\lambda + k) y_1)$

$= (\lambda x_1, k x_1, \lambda y_1, k y_1)$

$= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (k x_1, k y_1)$

$= \lambda(x_1, y_1) + k(x_1, y_1) = \lambda \vec{u_1} + \lambda \vec{u_2} = l_2$

(4)''

$\underbrace{\lambda \cdot (k \cdot \vec{u_1})}_{l_1} = \underbrace{(\lambda \cdot k) \vec{u_1}}_{l_2}$

$= \lambda \cdot (k(x_1, y_1))$

$= \lambda (k x_1, k y_1)$

$= (\lambda \cdot k)(x_1, y_1) = (\lambda \cdot k) \cdot \vec{u_1} = l_2$

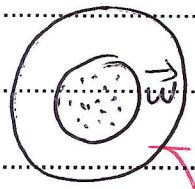
$(R^2, \oplus, +, \cdot)$ فضاء متجهي فوق R.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الفضاء الشعاعي الجزئي

ليكن V فضاء شعاعي فوق الحقل K ولتكن

$$W \subseteq V$$



فضاء شعاعي

مبرهنة:

نفرض V فضاء شعاعي فوق الحقل K و $W \neq \emptyset$ ، $W \subseteq V$

تكون W فضاء شعاعي جزئي في V إذا وفقط إذا تحققت الشرطان:

(1)

$$\forall \vec{w_1}, \vec{w_2} \in W : \vec{w_1} + \vec{w_2} \in W$$

(2)

$$\forall \lambda \in K ; \vec{w} \in W : \lambda \cdot \vec{w} \in W$$

ملاحظة:

يمكن دمج الشرطين (1) و (2) بشرط واحد

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \text{ و } \vec{w_1}, \vec{w_2} \in W$$
$$\lambda_1 \vec{w_1} + \lambda_2 \vec{w_2} \in W$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

نفرض W مجموعة كل المصفوفات الحقيقية من الشكل

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$$

برهن أن W فضاء جزئي من $M_{(3,1)}^{(R)}$

ملاحظة:

$M_{(3,1)}^{(R)}$ مجموعة مصفوفات عناصرها أعداد حقيقية وهي من الشكل (3 أعمدة، 1 سطر)

الحل:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R : \vec{w_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1+b_1 \end{bmatrix}, \vec{w_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \vec{w_1} + \lambda_2 \vec{w_2} \stackrel{?}{\in} W$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 \\ \lambda_1 b_1 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_1 b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 a_2 \\ \lambda_2 b_2 \\ \lambda_2 a_2 + \lambda_2 b_2 \end{bmatrix} \stackrel{?}{\in} W$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_2 b_2 \end{bmatrix} \stackrel{?}{\in} W$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{bmatrix} \in W$$

a b $a + b$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة