كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : **الخامسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التحويلات الأولية (البسيطة على مصفوفة)

تعريف (1): لتكن $A_{m\times n}$، نسمي كلاً من التحويلات التالية:

الأول: المبادلة بين موضعي سطرين (عمودين).

الثاني: ضرب عناصر أحد أسطر (أعمدة) المصفوفة A بعدد c مختلف عن الصفر.

الثالث: إضافة أحد أسطر (أعمدة) المصفوفة إلى عناصر سطر (عمود) بعد ضربه بعدد $c\neq 0$ تحويلاً أولياً على أسطر (أعمدة) A.

تعريف (2): لتكن $A_{m\times n}$ مصفوفة ما، نقول أنها تكافئ مصفوفة أخرى ولتكن $B_{m\times n}$ إذا كان بالإمكان الحصول على B من A وذلك بإجراء عدد منتهٍ من التحويلات الأولية

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\{-R_2+R_1\to R_1,\ R_2\leftrightarrow R_3\}$$

بإجراء التحويلين على A نحصل على B $\Leftarrow$ $A\sim B$ (تكافئ)

نتائج: ① كل مصفوفة تكافئ نفسها بالنسبة للأسطر (للأعمدة).

② إذا كانت $A\sim B$ فإن $B\sim A$

③ إذا كانت $\begin{cases}A\sim B\\ A\sim C\end{cases}$ $\Rightarrow$ $B\sim C$ المكافئات لثالث متكافئات.

مبرهنة ①: كل مصفوفة $A_{m\times n}$ تكافئ مصفوفة متدرجة بالنسبة للأسطر والأعمدة

مثال: لتكن

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1+R_2\longrightarrow R_2$

$-2R_1+R_4\longrightarrow R_4$

$$A\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_2\longleftrightarrow R_3$

$$A\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$-3R_2+R_3\longrightarrow R_3,\ R_2+R_4\longrightarrow R_4$

$$A\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{3}R_3\longrightarrow R_3$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} & \frac{-10}{3} \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$4R_3 + R_4 \longrightarrow R_4$

$$A \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & \frac{1}{3} & \frac{-10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{-8}{3}} & \frac{-19}{3} \end{bmatrix}$$

برهنة: أي مصفوفة نظامية $A_{m \times n}$ تكافئ المصفوفة الواحدية بالنسبة لأسطرها أو لأعمدتها.

مثال: لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ والمطلوب:

① أثبت أن A نظامية.

② حولها إلى المصفوفة الواحدية.

الحل: ① $\det A = |A| = 2 \times -1 - 3 \times 5 = -2 - 15 = -17 \neq 0$ أي A نظامية

② $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2} R_1 \longrightarrow R_1$

$I_n = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$ $-3R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{-17}{2} \end{bmatrix} \qquad \frac{2}{-17} R_2 \longrightarrow R_2$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{-5}{2} R_2 + R_1 \longrightarrow R_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وظيفة: أعد السؤال السابق من أجل المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

نتيجة: يقبل $A_{m \times n}$ عندئذ الشروط التالية متكافئة:

① A غير شاذة (نظامية)

② A قابلة للقلب

③ $A \sim I_n$

إيجاد مقلوب مصفوفة باستخدام العمليات الأولية:

$$[A_{n \times n} : I_n] \sim [I_n : A^{-1}]$$

مثال: أوجد مقلوب المصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ -1 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \frac{1}{5} R_2 \longrightarrow R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right] \quad R_1 \longleftrightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ -3 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad 3R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right] \quad -R_2 \longrightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-3}{5} \end{array}\right] \quad -R_2 + R_1 \longrightarrow R$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-3}{5} \end{array}\right]$$

$$\left[I_2 \mid B^{-1} \right]$$

$$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ -1 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حل المعادلات المصفوفية:

$A \cdot X = B$ ← مصفوفة ثابتة

A: مصفوفة معلومة — X: مصفوفة مجهولة — B: مصفوفة ثابتة

$$A^{-1} \cdot A X = A^{-1} B$$

نضرب الطرفين يمين بـ A^{-1}

$$I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

مثال:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{X_{2\times 2}}_{} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B}$$

(*) $X = A^{-1} \cdot B$

لنوجد A^{-1} ـــــ ثم نعوض في (*)

ـــــ

كثير الحدود المميز لمصفوفة مربعة:

لتكن $A_{m\times n}$ نسمي المحدد $f(\lambda) = |\lambda I_n - A|$

كثير الحدود المميز لـ A

تسمى المعادلة $f(\lambda) = 0$

$f(\lambda) = (\lambda I_n - A) = 0$

المعادلة المميزة لمصفوفة A

تسمى جذور هذه المعادلة بالقيم الذاتية لـ A.

ـــــ

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لتكن $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ والمطلوب:

① أوجد كثيرة الحدود المميزة لـ A

② أوجد القيم الذاتية لها.

① $f(\lambda)=|\lambda I_2 - A|$

$=\left|\lambda\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right|$

$=\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right|$

$=\left|\begin{bmatrix}(\lambda-1) & -1\\ 0 & (\lambda+1)\end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)(\lambda+1)=\lambda^2-1$

② $f(\lambda)=0$

$\lambda^2-1=0$

$\lambda^2=1$

$\lambda=\pm 1$ القيم الذاتية هي $[-1,1]$

ملاحظة (كلي هام جدا):

إن: أية مصفوفة مربعة تكون جذراً لكثيرة حدودها المميزة أي $f(A)=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لتكن $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

أثبت أن A جذر لكثير حدودها المميزة ثم احسب A^{-1}

وجدنا أن $f(\lambda)=\lambda^2-1$

لنثبت أن $f(A)=O_2$

$$f(A)=A^2-I_2 \stackrel{?}{=} O_2$$

$$A^{?}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O_2$$

حساب A^{-1}: وجدنا:

$$f(A)=O_2$$
$$A^2-I_2=O_2$$

نضرب بـ A^{-1}

$$A^{-1}.A^2-A^{-1}I_2=O_2$$
$$A-A^{-1}=O_2$$
$$A=A^{-1}$$
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

للتأكد $|A|=-1$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=A$$

ملاحظة: أعد السؤال من أجل المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z