كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية

المحاضرة : السابعة /نظري/

مثال: $y - xy' = \sin(y')$

الحل: $y = xy' + \sin(y')$

هي معادلة كليرو حلها العام:

$$y = cx + \sin(c)$$

المعادلات المحلولة بالنسبة لـ x:

الشكل العام لها: $x = f(y, y') \quad ....(1)$

نفرض: $y' = Z$

$$\Rightarrow x = f(y, Z) \quad ....(2)$$

نشتق (2) بالنسبة لـ y:

x' أو $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial Z} \cdot \dfrac{dZ}{dy}$; $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{y'} = \dfrac{1}{Z}$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Z} Z'$$

وهي معادلة محلولة بالنسبة للمشتق تكامل العام:

$$f(y, Z, c) = 0 \quad \ldots (3)$$

ومنه (2) و (3) هو حل وسيطي

مثال: $y - 3xy' - 6y^2y'^2 = 0 \quad \ldots (4)$

حل المعادلة.

إن المعادلة (4) غير محلولة لـ y' وغير محلولة لـ y:

$$\Rightarrow x = \frac{y - 6y^2y'^2}{3y'}$$

وهي محلولة بالنسبة لـ x:

نفرض $y' = Z$

$$x = \frac{y - 6y^2Z^2}{3Z}$$

نشتق بالنسبة لـ y:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{Z} = \frac{1 - 12yZ^2}{3Z} + \left[\frac{-y}{3Z^2} - 2y^2\right]\frac{dZ}{dy}$$

$$\frac{1}{Z} - \frac{1-12yZ^2}{3Z} = -y\left[\frac{1}{3Z^2} + 2y\right]Z'$$

توحيد مقامات:

$$\frac{2+12yZ^2}{3Z} = -y\left[\frac{1+6yZ^2}{3Z^2}\right]Z'$$

$$\frac{2\cancel{[1+6yZ^2]}}{\cancel{3Z}} = -y\left[\frac{\cancel{1+6yZ^2}}{\cancel{3Z^2}}\right]Z'$$

$$2 = \frac{-y}{Z}\frac{dZ}{dy} \Rightarrow \frac{2}{y}dy + \frac{dZ}{Z} = 0$$

$$2\ln(y) + \ln(Z) + c = 0 \quad \dots(6)$$

(5) مع (6) هو حل وسيطي.

المعادلات التفاضلية ذات المراتب العليا:

الشكل العام لها: $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$

وتكاملة العام:

$$F(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$$

لها عدة أنواع:

① المعادلات القابلة للتخفيض:

أحد أنواع هذه المعادلات:

① $f(x, y^{(n)}) = 0 \quad \ldots (8)$ لها حالتين:

$\boxed{A}$

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = f(x)\,dx$$

بالمكاملة:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + c_1$$

تكرار الخطوات n مرة نجد:

$$y = \iint \cdots \int f(x)\,dx\,dx \ldots dx + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$+ \cdots + c_{n-1} x + c_n$$

مثال: $y^{(4)} = 16 \sin 2x$

حل المعادلة

الحل: نكامل مباشرةً: $y''' = -8\cos 2x + c_1$

$y'' = -4\sin 2x + c_1 x + c_2$

$y' = +2\cos 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$

$\Rightarrow y = \sin 2x + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$

وهو الحل العام.

B) $x = f(y^{(n)})$

نفرض: $y^{(n)} = Z$

$x = f(Z) \quad \dots (9)$

$\Rightarrow dx = f'(Z)\, dZ \quad \dots (10)$

الآن: $\frac{dy^{n-1}}{dx} = Z$

$\Rightarrow dy^{(n-1)} = Z\, dx \quad \dots (11)$

نعوض (١٠) في (١١)

$$dy^{(n-1)} = Z f'(Z)\, dZ$$

نكامل:

$$y^{(n-1)} = \int Z f'(Z)\, dZ + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{d y^{(n-2)}}{dx} = \int Z f'(Z)\, dZ + C_1$$

$$\Rightarrow dy^{(n-2)} = \left[\int Z f'(Z)\, dZ + C_1\right] dx$$

نعوض (١٠):

$$dy^{(n-2)} = \left[\int Z f'(Z)\, dZ + C_1\right] f'(Z)\, dZ$$

بالمكاملة:

$$y^{(n-2)} = \int \left(f'(Z) \int Z f'(Z)\, dZ \right) dZ + C_1 f(Z) + C_2$$

بتكرار نفس الخطوات نحصل على:

$$y = g(Z, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad \ldots (12)$$

(9) مع (12) يشكل حل وسيطي.

مثال: مهم دورة $x = y'''^3 + 1$

الحل:

$y''' = Z$

$\boxed{x = Z^3 + 1} \dots (13) \Rightarrow \boxed{dx = 3Z^2\, dZ}$ (*)

$\frac{dy''}{dx} = Z$

$dy'' = Z\,dx$
$= 3Z^3\, dZ$

نعوض *:

$\Rightarrow y'' = \frac{3Z^4}{4} + C_1$

$\frac{dy'}{dx} = \frac{3Z^4}{4} + C_1$

نحسب *:

$dy' = \left[\frac{3Z^4}{4} + C_1\right] 3Z^2\, dZ$

$dy' = \left[\frac{9Z^6}{4} + 3C_1 Z^2\right] dZ$

$$y' = \frac{9}{28} Z^7 + C_1 Z^3 + C_2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{28} Z^7 + C_1 Z^3 + C_2$$

$$dy = \left[\frac{9}{28} Z^7 + C_1 Z^3 + C_2\right] 3Z^2 \, dZ$$

$$dy = \left[\frac{27}{28} Z^9 + 3C_1 Z^5 + 3C_2 Z^2\right] dZ$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{27}{280} Z^{10} + \frac{C_1}{2} Z^6 + C_2 Z^3 + C_3}$$