كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : مبوب العملي

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

قسم الفيزياء — تحليل عقدي ومتجهي

السنة الثانية — المحاضرة (1) عملي

ملخص نظري:

$\boxed{1}$ الجداء الداخلي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ حيث $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

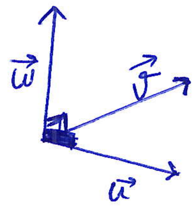
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v}) \quad \text{أو} \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$$

خواصه: الجداء الداخلي هو عدد حقيقي وهو معدوم عند تعامد $\vec{u}$ مع $\vec{v}$ وهو تبديلي

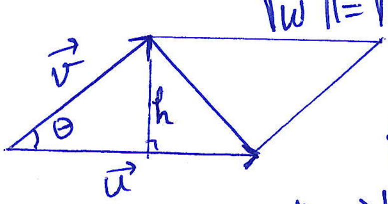
$\boxed{2}$ الجداء الخارجي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً)

الجداء الخارجي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الشعاع $\vec{W} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ أو $\vec{W} = \vec{u} \times \vec{v}$

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$$



$\vec{W}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$



نضع $(\vec{u},\vec{v}) = \theta$

نجد $h = \|\vec{v}\|.\sin\theta$

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{u}\|.h = 2S = S'$$

حيث S مساحة المثلث المنشأ على $\vec{u}$ و $\vec{v}$

S' مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على $\vec{u}$ و $\vec{v}$

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \vec{u}\times\vec{v}$$

* خواصه: الجداء الخارجي ليس تبديلي $\sin(\vec{u},\vec{v}) = -\sin(\vec{v},\vec{u})$

ينعدم الجداء الخارجي عندما يكون أحد الشعاعين معدوماً أو عندما يرتبطان خطياً

ملاحظة: كل من الجداءين الداخلي والخارجي غير تجميعي

$\boxed{3}$ الجداء المختلط: هو ذلك الجداء الذي يحوي جداءً داخلياً (سلمياً) وجداءً خارجياً (شعاعياً)

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$\vec{W} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{W}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \text{قيمة سلمية (عدد)}$$

المعنى الهندسي له: يمثل حجم متوازي السطوح المنشأ على $\vec{u}, \vec{v}, \vec{W}$

* من خواص المحددات أن التغيير الدوري للأسطر لا يغير قيمة المحدد بالتالي

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{W} = (\vec{W}\times\vec{u})\cdot\vec{v}$$

الحلزمه (١) عملي

التمرين [1] : لتكن لدينا الأشعة

$\vec{u} = 4\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

$\vec{v} = 3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

$\vec{w} = -\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

ⓐ احسب كلاً من $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ ، $\|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\|$

ⓑ $\vec{a}$ شعاع الواحدة الموازي لـ $2\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}$ والمتجه بالاتجاه المعاكس له.

الحل:

ⓐ $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = (4\vec{i}+\vec{j}\pm\vec{k})+(3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})+(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$

$= 6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$

$\vec{u}-\vec{v}-\vec{w} = (4\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})-(3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})-(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}) = 2\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$

$\|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\| = \sqrt{(2)^2+(5)^2+(-4)^2} = \sqrt{4+25+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

ⓑ $2\vec{u}-\vec{v}-\vec{w} = 2(4\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})-(3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})-(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$

$= 6\vec{i}+6\vec{j}-5\vec{k}$

$\|2\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\| = \sqrt{36+36+25} = \sqrt{97}$

$\vec{a} = \frac{-1}{\sqrt{97}}(6\vec{i}+6\vec{j}-5\vec{k}) = -\frac{6}{\sqrt{97}}\vec{i}-\frac{6}{\sqrt{97}}\vec{j}+\frac{5}{\sqrt{97}}\vec{k}$

التمرين [2] نفرض $\vec{u} = \vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ ، $\vec{v} = 3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

ⓐ بين أن الشعاعين $\vec{u}+\vec{v}$ ، $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان

ⓑ احسب قيمة الزاوية الحادة θ بين الشعاعين $2\vec{u}+\vec{v}$ و $2\vec{v}+\vec{u}$

ⓒ عين شعاع الواحدة العمودي على كل من $\vec{u}$, $\vec{v}$

ⓐ $\vec{u}+\vec{v} = 4\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{u}-\vec{v} = -2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = (4)(-2)+(1)(3)+(-1)(-5) = -8+3+5 = 0$

الجداء الداخلي للشعاعين $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ معدوم فهما متعامدان

ⓑ $2\vec{u}+\vec{v} = 5\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ $\qquad$ $2\vec{v}+\vec{u} = 7\vec{i}+\vec{k}$

$\cos\theta = \frac{(5)(7)+(3)(0)+(-4)(1)}{\sqrt{25+9+16}\times\sqrt{49+1}} = \frac{31}{50} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{31}{50}\right)$

ⓒ

نفرض $\vec{w}$ الشعاع العمودي على كل من $\vec{u}$, $\vec{v}$ إذاً

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (4-3)\vec{i} - (2+9)\vec{j} + (-1-6)\vec{k} = \vec{i} - 11\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1+121+49} = \sqrt{171}$$

شعاع الواحدة العمودي على كل من $\vec{u}$, $\vec{v}$

$$\vec{w_1} = \frac{1}{\sqrt{171}}(\vec{i} - 11\vec{j} - 7\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{171}}\vec{i} - \frac{11}{\sqrt{171}}\vec{j} - \frac{7}{\sqrt{171}}\vec{k}$$

التمرين $\boxed{3}$ لتكن $\vec{u} = (2,3,-5)$ $\vec{v}(1,-1,1)$ $\vec{w} = (5,2,-7)$

ⓐ أوجد الزاوية المحصورة بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

ⓑ احسب حجم متوازي السطوح المنشأ على $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

ⓒ احسب مساحة المثلث المنشأ على $\vec{u}$, $\vec{v}$

ⓓ احسب قيمة الجداء $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

ⓐ $$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{2-3-5}{\sqrt{4+9+25}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-6}{\sqrt{114}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-6}{\sqrt{114}}\right)$$

ⓑ $$\text{الحجم} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 2(7-2) - 3(-7-5) - 5(2+5)$$

$$= 10 + 36 - 35 = 11$$ وحدة مكعبة

ⓒ $$S = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\| , \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{4+49+25} = \frac{\sqrt{78}}{2}$$

ⓓ $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (7-2)\vec{i} - (-7-5)\vec{j} + (2+5)\vec{k} = 5\vec{i} + 12\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 12 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 12 & 7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (21 + 60)\vec{i} - (14 + 25)\vec{j} + (24 - 15)\vec{k}$$

$$= 81\,\vec{i} - 39\vec{j} + 9\vec{k}$$

المحاضرة (2) عملي

1. عين معادلة المستوي المار من النقطة $(2,3,1)$ ويوازي كل من المتجهين $\vec{u}(1,2,-4)$ و $\vec{v}(2,-2,1)$

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 9\vec{j} - 6\vec{k} \neq \vec{0}$$

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً $\Leftarrow$ المتجه $\vec{n}(-6,-9,-6)$ ناظم على المستوي المطلوب

$$P: \ -6(x-2) - 9(y-3) - 6(z-1) = 0$$

$$P: \ -6x - 9y - 6z + 45 = 0$$

2. أوجد معادلة المستوي المار بالنقاط $A(1,2,3)$ ، $B(2,1,2)$ ، $C(3,3,1)$ ماذا تلاحظ؟

$$\left.\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1,-1,-1) \\ \vec{AC} &= 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (2,1,-2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً

ناظم المستوي المطلوب $\vec{N} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$

من أجل $M(x,y,z)$ نقطة كيفية من المستوي يكون:

$$\vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(2+1) - (y-2)(-2+2) + (z-3)(1+2) = 0$$

$$3x - 3 - 0 + 3z - 9 = 0 \Rightarrow x + z - 4 = 0$$

وهي معادلة مستوي يوازي المحور (oy)

3. عين معادلة مستوي يوازي المستوي الذي معادلته $P_1: x - y + 3z + 7 = 0$ ويمر بمبدأ الإحداثيات.

ناظم المستوي المطلوب مرتبط خطياً مع ناظم المستوي P_1

$$\vec{n_2} = \vec{n_1} = (2,-1,3) \Rightarrow P_2: \ 2x - y + 3z = 0$$

و $h = 0$ المستوي مار من $O(0,0,0)$

4. أوجد معادلة المستوي الذي يقطع المحاور الإحداثية بالنقاط

$A(3,0,0)$ $B(0,-1,0)$ $C(0,0,2)$

معادلة المستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة على المحاور الإحداثية تعطى بالعلاقة:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$$

$$2x-6y+3z-6=0$$

5. أوجد الزاوية بين المستويين P_1 و P_2 حيث:

$P_1: x+2y+2z+8=0$, $P_2: 2x-y+5=0$

ماذا تستنتج؟

$\vec{n_1}(1,2,2)$ $\vec{n_2}(2,-1,0)$

نفرض θ الزاوية بين المستويين

$$\cos\theta = \frac{p_1\cdot p_2+q_1\cdot q_2+r_1\cdot r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\cdot\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}} = \frac{(1)(2)+(2)(-1)+(2)(0)}{\sqrt{1+4+4}\ \sqrt{4+1}} = \frac{0}{3\sqrt{5}}=0$$

بالتالي $\theta=\frac{\pi}{2}$ ، المستويان P_1 و P_2 متعامدان

6. ليكن المستوي P الذي معادلته . $P: 4x-12y+3z+7=0$

احسب بعد كل من النقاط الآتية $A(3,1,2)$, $B(3,1,-3)$, $C(-1,-1,-5)$ عن P.

$$\delta_A=\frac{P(3,1,2)}{\sqrt{16+144+9}}=\frac{4(3)-12(1)+3(2)+7}{\sqrt{169}}=\frac{13}{13}=1>0 \Rightarrow$$

A واقعة بالنسبة للمستوي P في الجهة الموجبة للناظم $\vec{n}(4,-12,3)$

$$\delta_B=\frac{P(3,1,-3)}{\sqrt{169}}=\frac{-2}{13}<0 \Rightarrow$$

B تقع بالنسبة للمستوي في الجهة المعاكسة للناظم $\vec{n}$

$$\delta_C=\frac{P(-1,-1,-5)}{\sqrt{169}}=\frac{-4+12-15+7}{13}=0 \Rightarrow$$

C تنتمي للمستوي P

تمارين إضافية

1. أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالنقطة $M(3,-1,7)$ ويعامد $\vec{n}(4,2,-5)$

$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$P: 4(x-3)+2(y+1)-5(z-7)=0$$

$$P: 4x+2y-5z+25=0$$

2. أوجد معادلة المستوي المار من $A(1,2,3)$، $B(3,-1,6)$، $C(5,2,0)$

$$P: \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 12x+20y+14z-100=0$$

3. أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالنقطة $(-2,4,1)$ ويوازي المستوي

$$P_1: 3x+2y-5z-7=0$$

ناظم المستوي P_2 المطلوب $\vec{n_2}=\vec{n_1}=(3,2,-5)$

$$P_2: 3(x+2)+2(y-4)-5(z-1)=0$$

$$3x+2y-5z+3=0$$

4. أوجد معادلة المستوي المار من $A(5,0,0)$، $B(0,2,0)$، $C(0,0,-3)$

المستوي المطلوب يقطع المحاور الإحداثية ~~ف~~ فمعادلة المستوي تعطى بالعلاقة:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow \frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1$$

$$6x+15y-10z-30=0$$

المحاضرة (3) عملي

1. اكتب المعادلات الديكارتية والوسيطية للمستقيم المار من النقطتين

$M_1(2,1,-1)$ و $M_2(1,-1,2)$

$\vec{u}=\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,-2,3)$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3} \quad , \quad \begin{cases} x=1-t \\ y=-1-2t \\ z=2+3t \end{cases} : t\in\mathbb{R}$$

2. اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم الذي يمر بالنقطة $M_0(1,2,-1)$ ويوازي المتجه $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، ثم اكتب المعادلات بالشكل الديكارتي وأوجد إحداثيات نقاط تقاطعه مع المستويات الإحداثية

المعادلات الوسيطية

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=-1+t \end{cases} : t\in\mathbb{R}$$

المعادلات الديكارتية:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{1}$$

يقطع المستقيم المستوي (xoy) عندما $z=0 \Leftrightarrow t=1$ نعوض في عبارتي x و y نجد

$x=1+2(1)=3$ و $y=5$ $\Leftarrow$ $(3,5,0)$

يقطع المستقيم xoz عندما $y=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}$ ومنه $x=-\frac{1}{3}, y=-\frac{5}{3}$

$\Leftarrow (-\frac{1}{3},0,-\frac{5}{3})$

يقطع المستقيم المستوي (yoz) عندما $x=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$ ومنه

$y=\frac{1}{2}$ و $z=-\frac{3}{2}$ $\Leftarrow$ $(0,\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

3. أوجد المعادلات الكارتيزية للمستقيم $\mathcal{L}$ المعين بالمعادلتين الأساسيتين

$$\mathcal{L}:\begin{cases} x - y + 2z - 5 = 0 \\ 3x + 5y - 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

$\vec{n}_1\,(1,-1,2)$ $\quad$ $\vec{n}_2\,(3,5,-4)$

نلاحظ أن $(1)(5)-(-1)(3)=8\neq 0$ نأخذ $z=1$

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x + 5y - 5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad M_0\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

شعاع توجيه $\mathcal{L}$ $\quad \vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 10\vec{j} + 8\vec{k}$

$$\frac{x-\frac{5}{2}}{-6} = \frac{y-\frac{1}{2}}{10} = \frac{z-1}{8}$$

ملاحظة يمكن اعتبار $\vec{u}\,(-3, 5, 4)$ شعاع توجيه أيضاً لـ $\mathcal{L}$ لأنه يرتبط خطياً مع $\vec{u}$

4. أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المعين بالمعادلتين الأساسيتين

$$\mathcal{L}:\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vec{n}_1\,(1,1,-1) \\ \vec{n}_2\,(1,-1,2) \end{matrix}$$

نلاحظ $(1)(-1)-(1)(1)\neq 0$ يمكن اختيار $z=t$

$$\begin{cases} x + y = t - 1 \\ x - y = -2t + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

بالجمع $2x = -t + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$

بالطرح $2y = 3t - 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$

المعادلات الوسيطية
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

5. اكتب المعادلة الديكارتية والمعادلات الوسيطية للمستقيم المعين بالمعادلتين الآتيتين

$$L : \begin{cases} 2x - 3y + 6z - 12 = 0 & \vec{n_1}(2,-3,6) \\ x - 3y + 3z - 6 = 0 & \vec{n_2}(1,-3,3) \end{cases}$$

$$\vec{u} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 0\vec{j} - 3\vec{k}$$

$\vec{u}(9, 0, -3)$

نعطي $z = 1$ نجد $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$ بالحل المشترك نجد $x = 3$, $y = 0$

النقطة $(3, 0, 1)$ تنتمي للمستقيم L

المعادلات الديكارتية

$$L : \frac{x-3}{9} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-1}{-3}$$

المعادلات الوسيطية

$$L : \begin{cases} x = 3 + 9t \\ y = 0 \\ z = +1 - 3t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

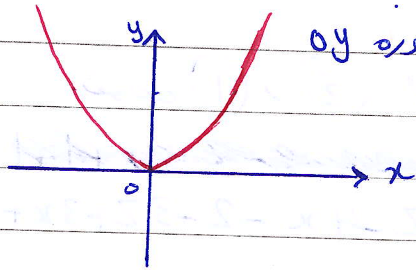
عملي تحليل عقدي ومتجهي (4)

1 أوجد المستقر الفعلي لكل من التوابع الشعاعية الآتية

1. $\vec{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \vec{r}(t) = (t , t^2)$

نضع $x = t$ و $y = t^2$ حيث $t \in \mathbb{R}$ نجد أن $y = x^2$

المستقر الفعلي هو قطع مكافئ ذروته $O(0,0)$ ومحوره Oy



2. $\vec{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \vec{r}(t) = e^{t}\,\vec{i} + e^{2t}\,\vec{j}$

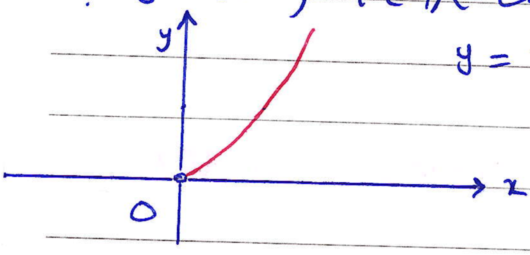
نضع $x = e^t$ نلاحظ $x > 0$ أياً كانت $t \in \mathbb{R}$ ولما $y = e^{2t}$ نجد

أيضاً $y > 0$ لكل $t \in \mathbb{R}$ ، وواضح أن $y = x^2$

فالمستقر الفعلي هو الجزء الواقع في الربع الأول

من القطع المكافئ الذي ذروته $O(0,0)$ ومحوره Oy

عدا النقطة $O(0,0)$ (لأن $x > 0$ و $y > 0$)

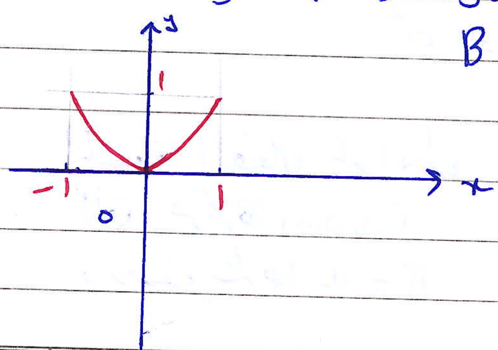


3. $\vec{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \vec{r}(t) = \left(\sin t \, , \, \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \right)$

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin t \Rightarrow -1 \le x \le 1 \\ y &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t = \sin^2 t \Rightarrow 0 \le y \le 1 \end{aligned}\right\} y = x^2$$

المستقر الفعلي هو جزء من القطع المكافئ $y = x^2$ وهو بالتحديد القوس

$\overset{\frown}{AOB}$ حيث $A(-1,1)$ و $B(1,1)$



4. $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{r}_1(u,v) = (u-v,\ 2v-3u,\ 2u-v+1)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= u - v \quad (1) \\ y &= 2v - 3u \quad (2) \\ z &= 2u - v + 1 \quad (3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & z - x = u + 1 \Rightarrow \boxed{u = z - x - 1} \quad (1') \\ & v = u - x = z - x - 1 - x \\ & \boxed{v = z - 2x - 1} \quad (2') \end{aligned}$$

نعوض (1) و (2) في (3)

$$y = 2(z-2x-1) - 3(z-x-1) = 2z - 4x - 2 - 3z + 3x + 3$$

$$y + x + z = 1$$

المستقر الفعلي هو المستوي

الذي معادلة $P : x + y + z - 1 = 0$

5. $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(u,v) = (a\cos u \cos v,\ a\cos u \sin v,\ a \sin u)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u \cos v \\ y &= a\cos u \sin v \\ z &= a \sin u \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x^2 &= a^2 \cos^2 u \cos^2 v \\ y^2 &= a^2 \cos^2 u \sin^2 v \\ z &= a^2 \sin^2 u \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 u\,(\cos^2 v + \sin^2 v) = a^2 \cos^2 u$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u = a^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

المستقر الفعلي هو الكرة

التي مركزها $(0,0,0)$

ونصف قطرها $R = a$

$\boxed{2}$ عين مجموعة تعريف كل من التوابع الشعاعية واوجد النهايات عند t_0

1. $\vec{r}(t) = (2t, \sqrt{4-t^2})$, $\lim\limits_{t\to 0} \vec{r}(t)$, $\lim\limits_{t\to 2} \vec{r}(t)$

هل $\vec{r}(t)$ مستمر عند الصفر

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t \Rightarrow w_1 = \mathbb{R} \\ y = \sqrt{4-t^2} \Rightarrow w_2 = [-2,2] \end{array}\right\} \Rightarrow w = w_1 \cap w_2 = \mathbb{R} \cap [-2,2] = [-2,2]$$

$\lim\limits_{t\to 0} \vec{r}(t) = (0, 2)$ $\qquad \vec{r}(0) = (0,2)$

$\vec{r}(t)$ مستمر عند $t=0$

$\lim\limits_{t\to 2} \vec{r}(t) = (4, 0)$

2. $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{t^2}, 1+e^{2t}, 1+e^{(t^2-2)}\right)$, $\lim\limits_{t\to +\infty} \vec{r}(t)$, $\lim\limits_{t\to 0} \vec{r}(t)$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \Rightarrow w_1 = \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ y = 1+e^{2t} \Rightarrow w_2 = \mathbb{R} \\ z = 1+e^{t^2-2} \Rightarrow w_3 = \mathbb{R} \end{array}\right\} w = w_1 \cap w_2 \cap w_3 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$\lim\limits_{t\to +\infty} \vec{r}(t) = (0, +\infty, +\infty)$

$\lim\limits_{t\to 0} \vec{r}(t) = (+\infty, 2, 1+e^{-2})$

$\boxed{3}$ اوجد مشتق التابع الشعاعي

$\vec{r}(t) = (\ln(2t^2-t), 2e^{3t}, t)$

$\vec{r}'(t) = \left(\frac{4t-1}{2t^2-t}, 6e^{3t}, 1\right)$

$\vec{r}(t) = (\sqrt{t+1}, 2^t, \cos t)$

$\vec{r}'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t+1}}, 2^t.\ln(2), -\sin t\right)$

$\boxed{4}$ لتكن لدينا التابع الشعاعي

$\vec{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{6-t} \,,\, \sqrt{t-3} \right)$

(a) عين مجموعة تعريف $\vec{r}(t)$

(b) عين المستقر الفعلي للتابع $\vec{r}(t)$

(c) اكتب معادلة المماس عند $t=4$

$x = \sqrt{6-t} \Rightarrow W_1 =]-\infty, 6]$

$y = \sqrt{t-3} \Rightarrow W_2 = [3, +\infty[$

$\Rightarrow W = W_1 \cap W_2 = [3, 6]$

$x^2 = 6-t$

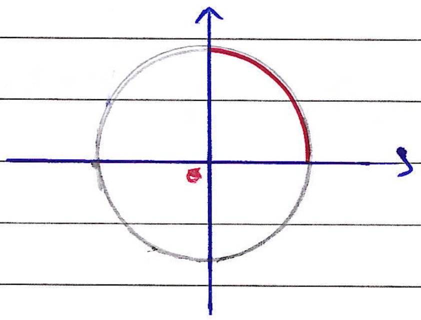
$y^2 = t-3$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 3$ دائرة مركزها ∘ ونصف قطرها $\sqrt{3}$

مع شرط ~~[illegible]~~

و $y = \sqrt{t-3}$ أي y تتحول بين $[0, \sqrt{3}]$

فالمستقر الفعلي هو قوس الدائرة في الربع الأول فقط



$t=4 \Rightarrow x = \sqrt{2} \,,\, y = 1 \Rightarrow M(\sqrt{2}, 1)$ نقطة التماس

ميل المماس $m = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{t-3}}}{\frac{-1}{2\sqrt{6-t}}} = -\dfrac{\sqrt{6-t}}{\sqrt{t-3}}$

$m_0 = -\dfrac{\sqrt{6-4}}{\sqrt{4-3}} = -\sqrt{2} \Rightarrow y - 1 = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2})$

$y = -\sqrt{2}x + 3$

$$\vec r_1(t) = (t^2, 0, e^t)$$ ليكن $\boxed{5}$

$$\vec r_2(t) = (t, \sin t, 1)$$

اوجد مشتقة $\vec r_1 \wedge \vec r_2$ بطريقتين، اوجد نهاية $\vec r_1, \vec r_2$ عندما $t \to 0$

$$\vec r_1 \wedge \vec r_2 = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ t^2 & 0 & e^t \\ t & \sin t & 1 \end{vmatrix} = -e^t \sin t\, \vec i - (t^2 - te^t)\vec j + (t^2 \sin t)\vec k \quad \boxed{\tfrac{b}{1}} *$$

$$(\vec r_1 \wedge \vec r_2)' = -[e^t \sin t + e^t \cos t]\,\vec i - (2t - e^t - te^t)\vec j + [2t\sin t + t^2\cos t]\,\vec k$$

$$(\vec r_1 \wedge \vec r_2)' = -e^t(\sin t + \cos t)\vec i + (e^t(t+1) - 2t)\vec j + (\sin t + t\cos t)\vec k$$

$$(\vec r_1 \wedge \vec r_2)' = (\vec r_1{}' \wedge \vec r_2) + (\vec r_1 \wedge \vec r_2{}') \quad \boxed{\tfrac{b}{2}} *$$

$$\vec r_1{}'(2t, 0, e^t) \qquad \vec r_2{}'(1, \cos t, 0)$$

$$(\vec r_1 \wedge \vec r_2)' = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 2t & 0 & e^t \\ t & \sin t & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ t^2 & 0 & e^t \\ 1 & \cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-e^t \sin t, -2t + te^t, 2t\sin t) + (-e^t\cos t, e^t, t^2\cos t)$$

$$= (-e^t(\sin t + \cos t), -2t + e^t(t+1), 2t\sin t + t^2\cos t)$$

$$\lim_{t \to 0} \vec r_1(t) = (0, 0, 1)$$

$$\lim_{t \to 0} \vec r_2(t) = (0, 0, 1)$$

6 .. ليكن $\vec{r}_1(t) = (\ln(t), 0, \cos t)$ ، $\vec{r}_2(t) = (0, t^2, e^t)$

أوجد مشتقة $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ بطريقتين مختلفتين

* الطريقة الأولى :

$\vec{r}_1\,'(t) = (\frac{1}{t}, 0, -\sin t)$

$\vec{r}_2\,'(t) = (0, 2t, e^t)$

$(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1\,' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_2\,' \cdot \vec{r}_1$

$= (\frac{1}{t}, 0, -\sin t) \cdot (0, t^2, e^t) + (0, 2t, e^t)(\ln t, 0, \cos t)$

$= [(\frac{1}{t})(0) + (0)(t^2) + e^t(-\sin t)] + [(0)(\ln t) + (2t)(0) + e^t \cos t]$

$= -e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\cos t - \sin t)$

* الطريقة الثانية

$\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t) = (0)(\ln(t)) + t^2(0) + e^t \cos t$

$= e^t \cdot \cos t$

$(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$

Omniah

المحاضرة (5) عملي

1 ليكن

$$x(t) = \cos t\,\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2 + t\,\vec{e}_3$$

أوجد معادلة المستقيم المماس والمستوي الناظم الموافق لـ $t = \frac{\pi}{2}$

تعطى معادلة المستقيم المماس

$$D: \frac{x - f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{y - g(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{z - h(z_0)}{h'(z_0)}$$

$f(t) = \cos t$ ، $f'(t) = -\sin t \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = 0$ $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$

$g(t) = \sin t$ ، $g'(t) = \cos t \Rightarrow g(\frac{\pi}{2}) = 1$ $g'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$h(t) = t$ ، $h'(t) = 1 \Rightarrow h(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ • $h'(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$\boxed{D: \frac{x - 0}{-1} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{1}}$$ المستقيم المماس

تعطى معادلة المستوي الناظم بالعلاقة

$$f'(x_0)(x - f(x_0)) + g'(x_0)(y - g(x_0)) + h'(x_0)(z - h(x_0)) = 0$$

$$-1\,(x - 0) + 0\,(y - 1) + 1\,(z - \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\boxed{-x + z = \frac{\pi}{2}}$$ المستوي الناظم

2 ليكن C منحني معطى بالمعادلة

$$\vec{x}(t) = t^2\,\vec{e}_1 + \frac{8}{3}t\sqrt{t}\,\vec{e}_2 + 4t\,\vec{e}_3$$

1. أوجد طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ حيث A هي النقطة الموافقة لـ $t=0$ و B هي النقطة الموافقة لـ $t = 3$
2. أوجد الأشعة $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$
3. أوجد معادلة المستقيم المماس للمنحني الموافق لـ $t = 1$
4. أوجد معادلة المستوي الناظم للمنحني الموافق لـ $t = 0$

$$AB = \int_0^3 |\vec{x}'(t)|.dt \qquad A(0,0,0) \quad B(9, 8\sqrt{3}, 12)$$ 1

$$\vec{x}'(t) = 2t\,\vec{e_1} + \tfrac{8}{3}\left(\sqrt{t} + \frac{t}{2\sqrt{t}}\right)\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$$

$$= 2t\,\vec{e_1} + 4\sqrt{t}\,\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$$

$$|\vec{x}'(t)| = \sqrt{4t^2+16t+16} = \sqrt{4(t^2+4t+4)} = 2\sqrt{(t+2)^2} = 2|t+2|$$

$$= 2(t+2)$$

$$AB = \int_0^3 2(t+2)\,dt = [t^2+4t]_0^3 = 9+12 = 21$$

2

$$\vec{T} = \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|} = \frac{t}{t+2}\vec{e_1} + \frac{2\sqrt{t}}{t+2}\vec{e_2} + \frac{2}{t+2}\cdot\vec{e_3}$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}, \quad \vec{T}' = \frac{2}{(t+2)^2}\vec{e_1} + \frac{2-t}{\sqrt{t}\,(t+2)^2}\vec{e_2} - \frac{2}{(t+2)^2}\vec{e_3}$$

$$= \frac{2}{(t+2)^2}\vec{e_1} + \frac{2t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{(t+2)^2}\vec{e_2} - \frac{2}{(t+2)^2}\vec{e_3}$$

$$|\vec{T}'| = \sqrt{\frac{4 + 4t^{-1} - 4 + t + 4}{(t+2)^4}} = \frac{\sqrt{4t^{-1}+t+4}}{(t+2)^2} = \frac{\sqrt{\frac{4}{t}+t+4}}{(t+2)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{t^2+4t+4}{t}}}{(t+2)^2} = \frac{t+2}{\sqrt{t}\,(t+2)^2} = \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+2)}$$

$$\vec{N} = \sqrt{t}\,(t+2)\left[\frac{2}{(t+2)^2}\vec{e_1} + \frac{2-t}{\sqrt{t}\,(t+2)^2}\vec{e_2} - \frac{2}{(t+2)^2}\vec{e_3}\right]$$

$$\vec{N} = \frac{2\sqrt{t}}{t+2}\vec{e_1} + \frac{2-t}{t+2}\vec{e_2} - \frac{2\sqrt{t}}{t+2}\vec{e_3}$$

$$= \frac{1}{t+2}\left[2\sqrt{t}\,\vec{e_1} + (2-t)\vec{e_2} - 2\sqrt{t}\,\vec{e_3}\right]$$

& 2

$$\vec{T} = \frac{1}{t+2}\left[t\vec{e}_1 + 2\sqrt{t}\,\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \right]$$

$$\vec{N} = \frac{1}{t+2}\left[2\sqrt{t}\,\vec{e}_1 + (2-t)\vec{e}_2 - 2\sqrt{t}\,\vec{e}_3 \right]$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{1}{(t+2)^2} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ t & 2\sqrt{t} & 2 \\ 2\sqrt{t} & 2-t & -2\sqrt{t} \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{(t+2)^2}\left[(4t - 4 + 2t)\vec{e}_1 - (-2t\sqrt{t} - 4\sqrt{t})\vec{e}_2 + (2t - t^2 - 4t)\vec{e}_3 \right]$$

$$= \frac{1}{(t+2)^2}\left[(6t-4)\vec{e}_1 + (2t+4)\sqrt{t}\,\vec{e}_2 - (t^2+2t)\vec{e}_3 \right]$$

3

$$\vec{x}(t) = t^2\vec{e}_1 + \frac{8}{3}t\sqrt{t}\,\vec{e}_2 + 4t\vec{e}_3$$

$$\vec{x}'(t) = 2t\vec{e}_1 + 4\sqrt{t}\,\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

$$f(t) = t^2 \Rightarrow f'(t) = 2t \quad , \quad g(t) = \frac{8}{3}t\sqrt{t} \Rightarrow g'(t) = 4\sqrt{t}$$

$$f(1) = 1 \text{ و } f'(1) = 2 \quad , \quad g(1) = \frac{8}{3} \text{ و } g'(1) = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} h(t) = 4t \Rightarrow h'(t) = 4 \\ h(1) = 4 \text{ و } h'(1) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{D: \frac{x-1}{2} = \frac{y-\frac{8}{3}}{4} = \frac{z-4}{4}}$$

4

$$f'(0)(x - f(0)) + g'(0)(y - g(0)) + h'(0)(z - h(0)) = 0$$

$$f(0) = 0 \text{ و } f'(0) = 0 \text{ ، } g(0) = 0 , g'(0) = 0 , h(0) = 0 , h'(0) = 4$$

$$0(x-0) + 0(y-0) + 4(z-0) = 0$$

$$4z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$$

3 **تمرين** : ليكن التابع الشعاعي

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(t) = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j} + t\, \vec{k}$$

أوجد الأشعة $\vec{B}, \vec{N}, \vec{T}$

$$\vec{T}_{(t)} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad *$$

$$\vec{r}'(t) = -\sin t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|r'(t)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\, \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\vec{N}_{(t)} = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} \quad *$$

$$\vec{T}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\, \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\, \vec{j} + 0\, \vec{k}$$

$$|\vec{T}'(t)| = \sqrt{\frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} = -\cos t\, \vec{i} - \sin t\, \vec{j}$$

$$\vec{B}(t) = \vec{T} \wedge \vec{N} \quad *$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\, \vec{i} \; \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\, \vec{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 t\right) \vec{k}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\, \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\, \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

$\boxed{4}$ ليكن التابع الشعاعي $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{t+1}, 3t^2-2t+7, \sin t\right)$

حيث $\vec{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

أوجد معادلة المستوي الناظم، المستقيم المماس في النقطة $r(0) = (1, 7, 0)$

$$f(t) = \frac{1}{t+1} \quad , \quad f'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \Rightarrow f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = -1$$

$$g(t) = 3t^2-2t+7 \quad , g'(t) = 6t-2 \Rightarrow g(0) = 7 \quad , \quad g'(0) = -2$$

$$h(t) = \sin t \quad , h'(t) = \cos t \Rightarrow h(0) = 0 , \quad h'(0) = 1$$

معادلة المستوي الناظم

$$f'(0)(x-1) + g'(0)(y-7) + h'(0)(z-h(0)) = 0$$

$$-(x-1) - 2(y-7) + (z-0) = 0$$

$$-x - 2y + z + 15 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z - 15 = 0$$

معادلة المستقيم المماس $(f'(0), g'(0), h'(0)) = (-1, -2, 1)$

$$\mathcal{L}\ D : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-0}{1}$$

علي عقيد ...

1 . حل المعادلة

$$(x - iy)(a - ib) = i^5$$

$i^4 = 1$

$$ax - bxi - ayi + byi^2 = i^4 \cdot i$$

$$(ax - by) - (bx + ay)i = i = 0 + 1 \cdot i$$

① $ax - by = 0 \quad \times (b)$

② $-bx - ay = 1 \quad \times (a)$ $\Rightarrow$ $abx - b^2 y = 0$

$-abx - a^2 y = a$

بالجمع $-(a^2 + b^2) y = a$ ومنه $\boxed{y = \dfrac{-a}{a^2 + b^2}}$

من ① $x = \dfrac{b}{a} y \Leftarrow x = \dfrac{b}{a} \times \left(\dfrac{-a}{a^2 + b^2} \right)$

$$\boxed{x = -\frac{b}{a^2 + b^2}}$$

2 اكتب العدد العقدي Z بالشكل الجبري حيث

$$Z = \frac{1}{(a + ib)^2} + \frac{1}{(a - ib)^2}$$

$$= \frac{(a - ib)^2 + (a + ib)^2}{(a + ib)^2 (a - ib)^2} = \frac{a^2 - b^2 - 2abi + a^2 - b^2 + 2abi}{[(a + ib)(a - ib)]^2}$$

$$Z = \frac{2(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2} + 0i$$

[3] أثبت أن $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}} = i$

$$\frac{(\sqrt{1+x^2}+ix)(x+i\sqrt{1+x^2})}{(x-i\sqrt{1+x^2})(x+i\sqrt{1+x^2})} = \frac{x\sqrt{1+x^2}+(1+x^2)i+ix^2+\overset{-1}{\overset{\shortparallel}{i^2}}x\sqrt{1+x^2}}{(x^2-\underset{\underset{-1}{\shortparallel}}{i^2}(1+x^2))}$$

$$\Rightarrow \frac{(2x^2+1)i}{x^2+1+x^2} = \frac{(2x^2+1)i}{2x^2+1} = i$$

[4] أوجد الأعداد العقدية التي تحقق المساواة $\bar{Z} = Z^2$

$$\bar{Z} = x - iy \Leftarrow Z = x+iy$$

$$Z^2 = (x^2-y^2)+2xyi$$

$$Z^2 = \bar{Z}$$

$$(x^2-y^2)+2xyi = x-yi \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = x \\ 2xy = -y \Rightarrow 2xy+y=0 \end{cases}$$

$$(2x+1)y = 0$$

إما $\boxed{y=0} \Rightarrow x^2 - 0 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1)=0$

$\Rightarrow$ إما $x=0$ أو $x=1$ $\Rightarrow$ $Z_1 = 0+0i = 0$, $Z_2 = 1+0i = 1$

أو $\boxed{x=-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ إما $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $Z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $Z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 اكتب العدد $\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$ بالشكل المثلثي

تذكرة

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

أو $2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta$

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$2\sin^2\theta = 1-\cos 2\theta$

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$Z = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} + i\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - i\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right]}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right]}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)i}{\underbrace{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}_{=1}} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

6 اكتب العدد العقدي $Z = \sin\alpha - i\cos\alpha$ بالشكل الأسي

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) \\ -\cos\alpha &= \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$$

$r = 1$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}+\alpha$

$$Z = 1 \cdot e^{\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)i}$$

$\frac{3\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2}$

أو $\frac{3\pi}{2} + \alpha = \alpha - \frac{\pi}{2}$

$$Z = 1 \cdot e^{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)i}$$

7 أوجد الجذور التكعيبية للعدد i

نفرض أن الجذر التكعيبي للعدد i هو Z فيكون $Z^3 = i$

$$Z = r \cdot e^{i\theta} \Rightarrow \left(r e^{i\theta}\right)^3 = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i} \Rightarrow r^3 e^{3\theta i} = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$$

$$i = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2} i}$$

$$r^3 = 1 \Rightarrow r = \sqrt[3]{1} = 1 .$$

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k \qquad k \in \{0, 1, 2\}$$

$$k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow Z_1 = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{6} i} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\boxed{Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}}$$

$$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} \qquad Z_2 = 1 \cdot e^{\frac{5\pi}{6} i}$$

$$Z_2 = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{Z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}}$$

$$k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow Z_3 = 1 \cdot e^{\frac{3\pi}{2} i}$$

$$Z_3 = 1 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

$$\boxed{Z_3 = -i}$$