كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : الثامنة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

- الأعداد العقدية :

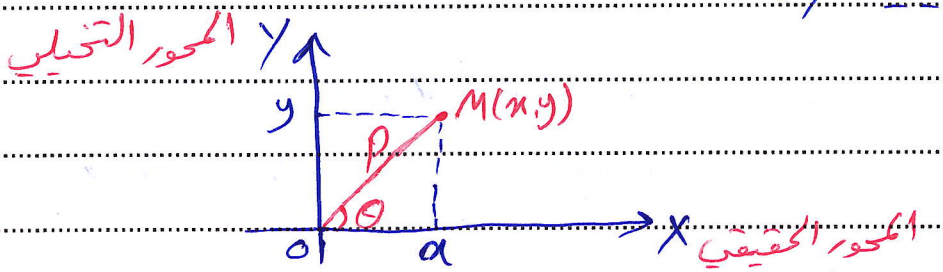
العدد العقدي Z يكتب بالشكل الجبري $Z=x+iy$ حيث كل من x,y أعداد حقيقية و i هو العنصر التخيلي ويحقق الشرط $i^2=-1$

ونسمي x الجزء الحقيقي للعدد العقدي Z

ونسمي y الجزء التخيلي للعدد العقدي Z.

- نسمي العدد العقدي $\bar{Z}=x-iy$ لمرافق العدد العقدي $Z=x+iy$

- يمثل العدد العقدي $Z=x+iy$ بالنقطة M و احداثياتها (x,y) حيث x هي المسقط على المحور الحقيقي $\overrightarrow{ox}$ و y هي المسقط على المحور التخيلي $\overrightarrow{oy}$



θ : الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{OM}$ مع المحور الحقيقي ونسميها زاوية العدد العقدي ونرمز لها $\theta=\text{Arg}Z$

$$\theta=\text{Arg}Z=\arg Z+2k\pi \quad ; k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

حيث $\arg Z$ هي الزاوية الأساسية للعدد العقدي Z و تحقق $-\pi\le\arg Z\le\pi$

ويتم حسابها بالعلاقة التالية :

$$\arg Z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & ; x>0 \\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & ; x<0,\ y\geq 0 \\ -\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & ; x<0,\ y<0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x=0,\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & ; x=0,\ y<0 \\ 0 & ; x=0,\ y=0 \end{cases}$$

او يتم حسابها بالعلاقات :

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} Z) = \frac{y}{x} \quad ; \quad \sin(\operatorname{Arg} Z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos(\operatorname{Arg} Z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ونعرف طول المتجه $\overrightarrow{OM}$ بطويلة العدد العقدي ونرمز له بـ $\rho = |Z|$

ويعطى بالعلاقة $Z = \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

ملاحظة :

اذا كان لدينا عددين عقديين Z_1 و Z_2 بحيث يتحقق $|Z_1| = |Z_2|$

بالتالي الزاوية اما متساوية او تختلف بمدورات 2π

$$|Z_1| = |Z_2| \Rightarrow \operatorname{Arg} Z_1 = \operatorname{Arg} Z_2 + n\,2\pi \quad ; (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

- ليكن لدينا العدد العقدي $Z = 1+i$ لنحسب ρ و θ :

طريقة اول للحل

$$\arg Z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta = \operatorname{Arg} Z = \arg Z + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; k = 0, \pm 1, \dots$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

طريقة ثانية للحل

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;;k=\dots$$

مثال آخر: ليكن العدد العقدي $Z = -3+7i$ لنحسب θ:

$$\arg Z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{7}{-3}$$

• العمليات على الأعداد العقدية: العدد العقدي المعطى بالصيغة الجبرية: $(Z = x+iy)$

ليكن لدينا العددين العقديين $Z_1 = x_1+iy_1$ ، $Z_2 = x_2+iy_2$ بالتالي:

1) الجمع:
$$Z_1+Z_2 = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

2) الطرح:
$$Z_1-Z_2 = (x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

3) الضرب:
$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

الجزء الحقيقي — الجزء التخيلي

حالة خاصة:
$$Z\cdot\bar{Z} = |Z|^2$$

الإثبات: $Z = x+iy$ ، $\bar{Z} = x-iy$

$$Z\cdot\bar{Z} = (xx-y(-y))+i(x(-y)+x(y))$$
$$= (x^2+y^2)+i(0) = x^2+y^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = |Z|^2$$

4) القسمة: $\frac{Z_1}{Z_2}$ حيث $Z_2 \neq 0$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1\cdot\bar{Z}_2}{|Z_2|^2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حالة خاصة:

$$Z_2^{-1} = \frac{1}{Z_2} = \frac{\overline{Z}_2}{|Z_2|^2}$$

البرهان

$$\frac{1}{Z_2} \cdot \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_2} = \frac{\overline{Z}_2}{|Z_2|^2}$$

نضرب ونقسم على المرافق

ومن هنا يمكننا إيجاد القسم الحقيقي والقسم التخيلي بالطريقة:

$$\text{Re}\,Z = \frac{Z+\overline{Z}}{2} \quad , \quad \text{Im}\,Z = i\,\frac{\overline{Z}-Z}{2}$$

القسم الحقيقي — القسم التخيلي

• خواص مرافق العدد العقدي:

1) $\overline{Z_1 \mp Z_2} = \overline{Z}_1 \mp \overline{Z}_2$

2) $\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2$

3) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2}$

4) $\overline{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = Z_1 + Z_2$

نقول عن عددين عقديين $Z_1 = x_1 + iy_1$ ، $Z_2 = x_2 + iy_2$ أنهما متساويان: $x_1 = x_2$ ، $y_1 = y_2$

مثال: أوجد قيمة كل من x, y : $(4+i2)x + (5-3i)y = 13+i$

$$4x + 2xi + 5y - 3iy = 13 + i$$

$$(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 5y &= 13 \\ 2x - 3y &= 1 \end{aligned}\right\} \text{المشترك الأول}$$

$$x = 2$$

$$y = 1$$

- اوجد ρ و θ :

a) $Z = 4+3i$

$x > 0$

$\arg z = \arg\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

$\theta = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + 2k\pi \; , k = 0, \pm 1 \dots$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

b) $Z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$

$x = -\cos\frac{\pi}{5} < 0 \; , \; y = \sin\frac{\pi}{5} > 0$

$\arg Z = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}\right)$

$= \pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$

$= \pi + \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$

$\theta = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \; , k = 0, \pm 1 \dots$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5}} = 1$

c) $Z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}$

$x = -\sin\frac{\pi}{8} < 0$

$y = -\cos\frac{\pi}{8} < 0$

$\arg Z = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$\arg Z = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{-\cos\frac{\pi}{8}}{-\sin\frac{\pi}{8}}\right)$

$\arg Z = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right)$

$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} \rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \dots\right)$

$\arg Z = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\arg Z = -\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{5}{8}\pi$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\rho = \sqrt{\left(-\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

- أي عدد عقدي $Z = x+iy$ يمكننا كتابته بالشكل المثلثي:

$$Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \; ; \quad \rho = |Z|$$

$$\theta = \operatorname{Arg} Z$$

مثال: اكتب العدد العقدي بالشكل المثلثي $Z = -1 - i\sqrt{3}$

$$x = -1 < 0 \; , \quad y = -\sqrt{3} < 0$$

$$\arg Z = -\pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{2}{3}\pi$$

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2$$

$$-1 - i\sqrt{3} = +2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

- أي عدد عقدي $Z = x+iy$ يمكننا كتابته بالشكل الأسي:

$$Z = \rho e^{i\theta} \; , \quad \rho = |Z| \; , \quad \theta = \operatorname{Arg} Z$$

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

$$= 2e^{-\frac{2}{3}\pi}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* يعطى جداء العددين العقديين :

$Z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$Z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$Z_1 \cdot Z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$: بالشكل

$Z_1 + Z_2 = (\rho_1\cos\theta_1 + \rho_2\cos\theta_2) + i(\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2)$: الجمع

- يعطى الجداء بالشكل الأسي :

$Z_1 \cdot Z_2 = (\rho_1 e^{i\theta_1})(\rho_2 e^{i\theta_2}) = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

يعطى القسمة بالشكل $\frac{Z_1}{Z_2}$ حيث $Z_2 \neq 0$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

- العدد العقدي للقوة n :

$x+iy = Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$

$Z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$Z^n = \rho^n e^{in\theta}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: احسب $(-1+i\sqrt{3})^{60}$

الحل: لدينا العدد العقدي $Z=(-1+i\sqrt{3})$ حيث $x=-1<0$, $y=\sqrt{3}>0$

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2}{3}\pi \;,\; \rho = \sqrt{1+3} = 2$$

$$Z^{60} = 2^{60}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi(60)\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi(60)\right)\right)$$

$$= 2^{60}\left(\cos(40\pi) + i\sin(40\pi)\right)$$

$$= 2^{60}$$

- خواص طويلة العدد العقدي:

1) $|\bar{Z}| = |Z|$, 2) $Z.\bar{Z} = |Z|^2$

3) $|Z_1.Z_2| = |Z_1||Z_2|$

4) $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

5) $|Z^n| = (|Z|)^n$

6) $|Re z| \le |Z|$, 7) $|Im z| \le |Z|$

8) $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$

9) $||Z_1|-|Z_2|| \le |Z_1-Z_2|$

مثال: اوجد الطويلة $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40} = ?$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$Z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$\rho_1 = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta_1 = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta_1 = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$Z_2 = 1 - i$

$\rho_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta_2 = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta_2 = \frac{y}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$

$Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$\Rightarrow \left[\frac{Z_1}{Z_2}\right]^{40} = (\sqrt{2})^{40}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}(40)\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}(40)\right)\right]$

$= (\sqrt{2})^{40}\left[\cos\left(-\frac{50\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{50\pi}{3}\right)\right]$

مثال:

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

$Z_1 = 1 - i \quad ; x > 0$

$\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \boxed{Z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$Z_2 = 1+i$

$\rho_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\theta_2 = \arctan\frac{y}{x} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{Z_2 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = e^{i(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^8 = e^{(i\frac{\pi}{2})8} = e^{4\pi i} = \cos 4\pi + i\sin 4\pi$$

$$= 1 + 0i = 1$$

- الجذر النوني للعدد العقدي Z يكون حسابه بالعلاقة التالية:

$$Z_k = \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{|Z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$k = 0, 1, \dots (n-1)$

$\theta = \arg Z$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

اوجد حل الجذر $\sqrt[4]{1-i}$

$r = |1-i| = \sqrt{2}$ ، $\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4}$

$$Z_k = \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{1}{8}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[4]{\ } = (\ )^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}$ ← $\sqrt[8]{2}$

$k=0 \Rightarrow \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$

$k=1 \Rightarrow \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7}{16}\pi\right)$

$k=2 \Rightarrow \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi + i\sin\frac{15}{16}\pi\right)$

$k=3 \Rightarrow \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16} + i\sin\frac{23}{16}\pi\right)$

- الدوال العقدية:

الدالة $W = f(z)$ المعرفة على المجموعة $D \subseteq \mathbb{C}$

$W: D \to \mathbb{C}$ وقيمها $\mathbb{C}$

اذا كانت $Z = x+iy$ ، $W = u+iv$ بالتالي العلاقة بين الدالة $W=f(z)$ و المتغير Z يمكن وصفها من خلال العلاقة بين الدالتين الحقيقية u, v المتعلقة بالمتغيرات الحقيقية x, y.

$u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$

$W = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

دوال حقيقية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

دالة عقدية $W = Z^3 - i\bar{Z}$

نضع $Z = x + iy$ ؟ u, v

$$W = (x+iy)^3 - i(x-iy)$$

$$= x^3 - iy^3 + i3x^2y - ix + y$$

$$= \underbrace{(x^3 - 3xy^2 + y)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(-y^3 + x + 3x^2y)}_{v(x,y)}$$

إذاً $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$ ، $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + x$

- نهاية الدالة العقدية:

$Z_0 = x_0 + iy_0$

$$\lim_{Z \to Z_0} f(Z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y)$$

مثال: أوجد نهاية دالة عقدية $f(Z) = Z^3 - i\bar{Z}$ عندما Z تسعى إلى 1.

الحل:

$Z_0 = 1 + 0i \Rightarrow x_0 = 1 \,,\, y_0 = 0$

$$\lim_{Z \to 1} f(Z) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} (x^3 - 3xy^2 + y) + i \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} (-y^3 + x + 3x^2y) = 1 - i$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* لتكن الدالة $f(z)$ معرفة على D حيث $D \subseteq \mathbb{C}$ نهاية الدالة $f(z)$ في النقطة $z_0 \in D$ اذا تحقق انه من اجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ من اجل جميع النقاط $z \in D$ تتحقق الشرط

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad ; \quad z, z_0 \in \mathbb{C}$$

وبالتالي فإن العبارة التالية محققة $|f(z) - A| < \varepsilon$

وفي هذه الحالة نكتب

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

مثال: لتكن w دالة خطية $w = az + b$ حيث a, b اعداد عقدية ثابتة ولنثبت ان الدالة w مستقرة في النقطة z_0 ويساوي $w_0 = az_0 + b$ حيث $a \neq 0$

الحل:

لإثبات انها مستقرة يجب ان تكون نهايتها موجودة عند النقطة z_0

$$|w - w_0| =$$

$$|az + b - az_0 - b| = |a(z - z_0)| = |a||z - z_0|$$

نختار $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ حيث $a \neq 0$ ويتحقق $|z - z_0| < \delta$

$$|w - w_0| = |a||z - z_0| < |a|\delta = |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

$$|w - w_0| < \varepsilon$$

وبالتالي

$$\lim_{z \to z_0} w = w_0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- خواص النهاية:

اذا كانت $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$

$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$

بالتالي:

1] $\lim_{z \to z_0} [f(z) \mp g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \mp \lim_{z \to z_0} g(z) = A \mp B$

2] $\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B$

3] $\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{A}{B}$

حيث $g(z) \neq 0$ و $B \neq 0$

- نقول ان الدالة $f(z)$ انها قابلة للاشتقاق اذا كان كل من $u(x,y)$, $v(x,y)$ معرفة وقابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}^2$ وتحقق الشرطين:

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

وتسميها شرطي كوشي - ريمان.

- نسمي الدالة $f(z)$ التي تحقق قابلية الاشتقاق في جميع نقاط تعريفها (بدالة تحليلية).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: ادرس قابلية اشتقاق الدالة $w = e^z$

[ممكن يكون السؤال اثبت أن الدالة قابلية ,]

الحل:

$$z = x + iy$$

$$w = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$= e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$= e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

$$v(x,y) = e^x \sin y$$

الآن نتحقق من الشرطين:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

محققة $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

محققة $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

الشرطين محققين والدالة قابلة للاشتقاق.

① $$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

② $$w' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$w' = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

$$w' = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

لنوجد w' نختار عبارة واحدة من هذه العبارات الـ 4

مثال: اثبت ان الدالة تحليلية : $w = z \cdot \bar{z}$

الحل: $\Rightarrow w = |z|^2 = x^2 + y^2$

$$z = x + iy$$

$$u(x,y) = x^2 + y^2$$

$$v(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

ومنه الدالة ئي تحليلية .

تعريف : الدالة في $v(x,y)$ دالة توافقية في D اذا كانت تمتلك مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة الثانية و تحقق معادلة لابلاس :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: الدالة $v = x^2 + 2xy^2$ توافقية أم لا؟

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2y^2 \;;\; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 4xy \;;\; \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 4x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 + 4x \neq 0$$

وبالتالي v ليست توافقية

مثال: $u = \ln(x^2+y^2)$ الدالة توافقية أم لا؟

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \;,\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2 - 4x^2 + 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} \;,\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

الشرط محقق $\Leftarrow$ الدالة توافقية.

- تكامل دوال عقدية:

لتكن الدالة $f(z)$ معرفة ومستمرة في $D \subset \mathbb{C}$ ولتكن C منحنى أملس عندئذٍ فإن تكامل $f(z)$ على C يعطى بالعلاقة:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: اوجد قيمة التكامل:

$$\int_S (1+i-2\bar{z})\,dz$$

حيث S هو القطع $y=x^2$ ومحدد بالنقطتين $z_2=1+i$ $z_1=0$

الحل: نفرض $z=x+iy$ $f(z)=1+i-2\bar{z}=1+i-2(x-iy)$

$$f(z)=1-2x+i(1+2y)$$

$u=1-2x$, $v=1+2y$ $\quad 0\to 1+i$

$y=x^2$, $dy=2x\,dx$ $\quad x=0,\ x=1$ $\quad y=0,\ y=1$

$$\int_S (1+i-2\bar{z})\,dz=\int_0^1 (1-2x)\,dx-\int_0^1 (1+2y)\,dy$$

$$+i\left(\int_0^1 (1+2y)\,dx+\int_0^1 (1-2x)\,dy\right)$$

$$=\int_0^1 [(1-2x)-(1-2x^2)2x]\,dx+i\int_0^1 [1+2x^2+(1-2x)2x]\,dx$$

$$=\boxed{-2+\frac{4}{3}i}$$

مثال: وظيفة: الجواب

$$\int_{1-i}^{2+i} \underbrace{(3z^2+2z)}_{f(z)=u+iv}\,dz=7+19i$$

$x\in[1,2]$ $\quad y\in[-1,+1]$

نحل بنفس طريقة الحل المثال السابق.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

اوجد التكامل $\int_c z\bar{z}+z^2\,dz$ حيث c دائرة الواحدة

$|z|=1$

$0\le \arg z\le \pi$

الحل: نضع $z=\rho e^{i\theta}$ $\quad \rho=1$

$z=e^{i\theta}\ ;\ 0\le\theta\le\pi$

$dz=ie^{i\theta}d\theta$

$$\int_c (z\bar{z}+z^2)\,dz=\int_0^{\pi}(1+e^{2i\theta})\,ie^{i\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}(ie^{i\theta}+ie^{3i\theta})\,d\theta=e^{i\theta}+\frac{1}{3}e^{3i\theta}\Big|_0^{\pi}$$

$\cos\pi+i\sin\pi$
$-1+i0$

$$=e^{i\pi}+\frac{1}{3}e^{3i\pi}-e^{0}-\frac{1}{3}e^{0}$$

$$=-1-\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة