كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

المجموعة المولدة :

نسمي $M=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة مولدة V إذا كان كل عنصر من V يكتب على شكل تركيب خطي لعناصر M

$$\forall x \in V ; X = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

مثال :

$M=\{e_1(1,0,0), e_2(0,1,0), e_3(0,0,1)\}$ تولد R^3

$$\forall (x,y,z) \in R^3$$

$$(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)$$
$$= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
$$= xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$\Leftarrow$ M مولدة للفضاء R^3

- نقول عن M انها قاعدة للفضاء V(E) اذا كانت :

1) M مستقلة خطياً

2) M مولدة للفضاء V

مثال : $M=\{e_1, e_2, e_3\}$ تشكل قاعدة للفضاء R^3

في المثال السابق أثبتنا أن M مولدة للفضاء R^3

بقي الاستقلال الخطي :

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$$

$$(\alpha_1,0,0) + (0,\alpha_2,0) + (0,0,\alpha_3) = (0,0,0)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$\Leftarrow$ M مستقلة خطياً $\Leftarrow$ M قاعدة للفضاء R^3

مثال: اثبت أن:

$$M = \{x_1(1,1,1,1),\ x_2(0,1,1,1),\ x_3(0,0,1,1),\ x_4(0,0,0,1)\}$$

قاعدة للفضاء R^4

الحل: اثبتنا سابقاً أن M مستقلة خطياً (في المحاضرة السابقة)

يجب إثبات أن M مولدة للفضاء R^4

$$\forall X \in R^4 : X(x,y,z,t)$$

نبحث عن $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ بحيث:

$$X = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4$$

$$(x,y,z,t) = (\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

$$\alpha = x$$

$$\alpha+\beta = y \Rightarrow \beta = y-\alpha = y-x$$

$$\alpha+\beta+\gamma = z \Rightarrow \gamma = z-(\alpha+\beta) \Rightarrow \gamma = z-y$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = t \Rightarrow \delta = t-(\alpha+\beta+\gamma) \Rightarrow \delta = t-z$$

$$X = x\,x_1 + (y-x)x_2 + (z-y)x_3 + (t-z)x_4$$

$\Leftarrow$ M مولدة للفضاء R^4

وبما أنها مستقلة خطياً $\Leftarrow$ M قاعدة للفضاء R^4

- أبعاد فضاء المتجهات:

لتكن M قاعدة للفضاء المتجهي $V(E)$ و $M = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\Leftarrow$ بعد الفضاء V هو n ونرمز له: $\dim(V) = n$

* ملاحظات:

1) اذا كانت W فضاء جزئي من V عندئذٍ

$$\dim(W) \leq \dim(V)$$

2) اذا كانت $\dim(V) = n$ و $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ مستقلة خطياً

$\Leftarrow$ M مولدة لـ V

في المثال السابق نعلم أن $\dim(R^6) = 6$ و M مستقلة خطياً $\Leftarrow$ M قاعدة

3) اذا كان $\dim(V) = n$ و $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ مولدة للفضاء V

$\Leftarrow$ M قاعدة للفضاء V

تمرين:

$$M = \left\{ x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, x_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

1) برهن أن M مستقلة خطياً

2) برهن أن

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in Span(M)$$

3) برهن أن M قاعدة لـ $M_{2\times2}$ (المصفوفة المربعة)

الحل: 1)

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2\alpha_3 \\ 0 & -\alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = 0$

$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = 0$

$\Leftarrow$ M مستقلة خطياً

2) $D \overset{?}{=} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 1 - \alpha_1 = -2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 1 \Rightarrow 2\alpha_3 = 1 - \alpha_1 = -2 \Rightarrow \alpha_3 = -1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = -1 \Rightarrow \alpha_4 = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$D = 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 0x_4$

$\Rightarrow D \in \text{Span}(M)$

3) ليكن $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$

$X \overset{?}{=} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = a$

$\alpha_1 + \alpha_c = c \Rightarrow \alpha_2 = c - \alpha_1 = c - a$

$\alpha_1 + 2\alpha_3 = b \Rightarrow \alpha_3 = \frac{b - \alpha_1}{2} = \frac{b - a}{2}$

$\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = d \Rightarrow \alpha_4 = d - \alpha_2 + \alpha_3$

$$= d-c+a+\frac{b-a}{2} = d-c+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

$$X = ax_1 + (c-a)x_2 + \frac{b-a}{2}x_3 + \left(d-c+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)x_4$$

$\Leftarrow M$ مولدة لـ $M_{2\times 2}$

نُعِب فضاء المصفوفات المربعة $dim=4$

- طلب إضافي: 4) هل:

$$M_1=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

قاعدة لـ $M_{2\times 2}$ ؟

بما أن $dim=4$ و M_1 تحوي 4 عناصر، لإثبات أن M_1 قاعدة

يكفي أن نبرهن أنها مولدة.

$$\forall\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&b\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\c&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&d\end{bmatrix}$$

$$=a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$\Leftarrow M_1$ مولدة $\Leftarrow M_1$ قاعدة.

تمرين: أثبت أن: $M=\{u_1=t^2-2t-3,\ u_2=2t^2+3t-4\}$

مستقلة خطياً، ثم أثبت أن: $u=4t^2-6t-1\in Span(M)$

الحل: 1)

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=0$$

$$(\alpha_1+2\alpha_2)t^2+(-2\alpha_1+3\alpha_2)t-3\alpha_1-4\alpha_2=0$$

$$\alpha_1+2\alpha_2=0\Rightarrow\alpha_1=-2\alpha_2$$

$$-2\alpha_1+3\alpha_2=0\Rightarrow 7\alpha_2=0\Rightarrow\alpha_2=0\Rightarrow\alpha_1=0$$

$$-3\alpha_1-4\alpha_2=0$$

(٠,٠) تحقق المعادلة الأخيرة ⇐ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ومنه M مستقلة خطياً

2) $u = \alpha u_1 + \beta u_2$

$4t^2 - 6t - 1 = (\alpha + 2\beta)t^2 + (-2\alpha + 3\beta)t - 3\alpha - 4\beta$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 4 \\ -2\alpha + 3\beta = -6 \\ -3\alpha - 4\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow 7\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{2}{7}$$

$\alpha = 4 - 2\beta = \frac{28}{7} - \frac{4}{7} = \frac{24}{7}$

نعوض في المعادلة الأخيرة

$-\frac{72}{7} - \frac{8}{7} = -\frac{80}{7} \neq -1$

لا تحقق

$u \notin \text{Span}(M)$ ⇐

— انتهت المحاضرة —