كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : جبر خطي

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

فضاء المتجهات (الفضاء الشعاعي):

تعريف: ليكن V مجموعة غير خالية نعرف عليها عمليتين: الأولى: داخلية $(*)$، الثانية: خارجية $(\cdot)$.

مجموعة مؤثراتها الخارجية فوق الحقل التبديلي E، سمي الثلاثية $(V, *, \cdot)$ فضاء متجهات على E ونرمز له $V(E)$ اذا تحقق:

1) $(V, *)$ زمرة تبديلية

2) العملية $\cdot$ تحقق الشرط: (نسمى مبادئ)

1) $\forall x \in V \; ; \; 1.x = x$

2) $\forall \alpha \in E \; \text{و} \; \forall x, y \in V \; ; \; \alpha.(x * y) = (\alpha.x) * (\alpha.y)$

3) $\forall \alpha, \beta \in E \; \text{و} \; \forall x \in V \; ; \; (\alpha * \beta).x = (\alpha.x) * (\beta.x)$

4) $\forall \alpha, \beta \in E \; \text{و} \; \forall x \in V \; ; \; (\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$

مثال: $(R, +, \cdot)$ تشكل فضاء متجهي فوق نفسها أي أن: $(E = V = R)$

ملاحظة: الشروط السابقة دوماً محققة في R

مثال: لتكن X مجموعة غير خالية وليكن $(E, +, \cdot)$ حقل تبديلي. نرمز لكل التطبيقات من X إلى E بالرمز $\mathcal{L}(X, E)$ عندئذٍ: $(\mathcal{L}, +, \cdot)$ تشكل فضاء متجهي.

الإثبات:

العملية $+$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

العملية $\cdot$: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

1) نرهن $(\mathcal{L}, +)$ زمرة تبديلية:

1) $\forall f,g \in \mathcal{L} : (f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$

$= (g+f)(x)$ ⟹ العملية تبديلية

2) $\forall f,g,h \in \mathcal{L} : [(f+g)+h](x) = (f+g)(x)+h(x) =$

$f(x)+g(x)+h(x) = f(x)+(g+h)(x) = [f+(g+h)](x)$

⟹ العملية تجميعية

3) $f \in \mathcal{L}$ متأمل لـ

يوجد $\Theta : X \to E : \Theta(x) = 0_E$

بحيث $(f+\Theta)(x) = f(x)+\Theta(x) = f(x)+0_E = f(x)$

⟹ Θ هو العنصر الحيادي

4) $f \in \mathcal{L}$ متأمل لـ

يوجد $-f : X \to E ; (-f)(x) = -f(x)$

وتحقق $(f+(-f))(x) = f(x)-f(x) = 0$

⟹ $-f$ العنصر النظير

⟹ $(\mathcal{L},+)$ زمرة تبديلية

(2) يمكن التحقق بسهولة من أن:

1) $\forall f \in \mathcal{L} : 1f = f$

2) $\forall \alpha \in E \ni \forall f,g \in \mathcal{L} : \alpha.(f+g) = \alpha f + \alpha g$

$[\alpha.(f+g)](x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha[f(x)+g(x)]$ (بالنسبة لـ (2))

$= \alpha f(x)+\alpha g(x) = (\alpha f)(x)+(\alpha g)(x)$

$= (\alpha f+\alpha g)(x) \Rightarrow \alpha.[f+g] = \alpha f+\alpha g$

3) $\forall \alpha,\beta \in E \ni \forall f \in \mathcal{L} : (\alpha+\beta)f = \alpha f+\beta f$

4) $\forall \alpha,\beta \in E \ni \forall f \in \mathcal{L} : (\alpha.\beta)f = \alpha(\beta f)$

⟹ فضاء متجهي $(\mathcal{L},+,.)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ـ فضاء المتجهات الجزئي (الفضاء الجزئي) :

تعريف : ليكن V فضاء متجهي فوق الحقل F وليكن $\phi \neq W \subset V$

نقول أن W فضاء متجهي جزئي اذا تحقق

1) W مغلقة بالنسبة لعملية الجمع $(+)$

$$\forall x,y \in W \Rightarrow x+y \in W$$

2) W مغلقة بالنسبة لعملية الضرب $(\cdot)$

$$\forall \alpha \in F \ \exists \ \forall x \in W \Rightarrow \alpha x \in W$$

يمكن دمج الشرطين بشرط واحد :

$$\forall \alpha,\beta \in F \ \exists \ \forall x,y \in W : \alpha x + \beta y \in W$$

* ملاحظة : $\alpha = \beta = 0 \Leftarrow 0x + 0y = 0 \in W$

دائماً الفضاء الجزئي يحوي العنصر الحيادي في V بالنسبة لعملية الجمع

مثال : مجموعة المصفوفات المربعة $M_{2\times 2}$ من الدرجة 2×2 بالنسبة لعملية $+,\cdot$

تشكل فضاء متجهي $(M_{2\times 2}, +, \cdot)$ فضاء متجهي فوق R

* ملاحظة : العنصر الحيادي بالنسبة للجمع هو المصفوفة الصفرية والنظير هو المعكوس

العنصر الحيادي بالنسبة للضرب هو المصفوفة الواحدية

ليكن $P_{2\times 2}$ المصفوفات القطرية من الدرجة 2×2 لنبرهن $P_{2\times 2}$ فضاء متجهي جزئي من $M_{2\times 2}$

برهان :

$$\forall \alpha,\beta \in R, \ \forall X,Y \in P_{2\times 2}$$

مثل :

$$X = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha X + \beta Y = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta b_1 & 0 \\ 0 & \beta b_2 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 & 0 \\ 0 & \alpha a_2 + \beta b_2 \end{bmatrix} \in P_{2\times 2}$$

$\Rightarrow (P_{2\times 2}, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $M_{2\times 2}$

- بشكل عام:

المصفوفات المربعة من المرتبة $n\times n$ بالنسبة لعملية الجمع والضرب $\cdot$ $(+,\cdot)$

حوت R تشكل فضاء متجهي

ومجموعة المصفوفات القطرية من المرتبة $n\times n$ تشكل فضاء جزئي

ومجموعة المصفوفات المثلثية العليا والسفلى من المرتبة $n\times n$ تشكل فضاء جزئي

نظرية: تقاطع فضاء متجهات جزئيين هو فضاء متجهات جزئي

البرهان: ليكن V فضاء متجهي حوت الحقل E وليكن w_1, w_2 فضاءين جزئيين من V

ولنبرهن أن $w_1 \cap w_2$ فضاء جزئي

$$\forall \alpha,\beta \in E \; ; \; \forall x,y \in w_1 \cap w_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x, y \in w_1 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in w_1 \\ x, y \in w_2 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in w_2 \end{cases}$$

لأن w_1 و w_2 فضاء جزئي برهناً

$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in w_1 \cap w_2 \Rightarrow w_1 \cap w_2$ فضاء جزئي

- **ملاحظة:** تقاطع أي عدد من الفضاء الجزئية هو فضاء جزئي

$w_1, w_2, \dots, w_n$ فضاءات جزئية

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} w_i$ فضاء جزئي

- **ملاحظة:** اجتماع فضائي متجهات جزئية ليس بالضرورة فضاء جزئي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لتكن $M_{2\times 2}$ المصفوفة المربعة من الرتبة 2x2

$W_1 = \{$ المصفوفة المثلثية السفلى من الرتبة 2x2 $\}$

$W_2 = \{$ المصفوفة المثلثية العليا من الرتبة 2x2 $\}$

$\Rightarrow W_1 \cup W_2 = \{$ مثلثية سفلى , مثلثية عليا $\}$

ليكن : $X \in W_1$ حيث : $X = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix}$

ليكن : $Y \in W_2$ حيث : $Y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$

$$\alpha X + \beta Y = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ \alpha b_1 & \alpha c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_2 & \beta b_2 \\ 0 & \beta c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \beta b_2 \\ \alpha b_1 & \alpha c_1 + \beta c_2 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$$

$\Rightarrow W_1 \cup W_2$ ليست فضاء جزئي

- فضاء المتجهات الجزئية المولد من مجموعة S :

ليكن $V(E)$ فضاء متجهي وليكن : $S = \{x_1, \dots, x_n\}$

مجموعة التركيبات الخطية من الشكل :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

حيث $\alpha_i \in E$

تشكل فضاء متجهي جزئي نرمز له بالرمز $Span(S)$ وهو أصغر فضاء متجهي جزئي من V يحوي S

مثال: اثبت أن : $S = \{(1,2,0), (2,1,0)\}$ تولد الفضاء المتجهي الجزئي $W = \{(x,y,0) : x,y \in R\}$ من R^2

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: نبحث عن α, β بحيث يمكن كتابة $(x,y,0)$ بالشكل التركيبي التالي:

$$(x,y,0) = \alpha(1,2,0) + \beta(2,1,0)$$

$$(x,y,0) = (\alpha+2\beta, 2\alpha+\beta, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

بالحل المشترك:

$$\alpha = \frac{1}{3}(2y - x)$$

$$\beta = \frac{1}{3}(2x - y)$$

$$\Rightarrow (x,y,0) = \frac{1}{3}(2y-x)(1,2,0) + \frac{1}{3}(2x-y)(2,1,0)$$

$\Leftarrow$ S تولد الفضاء الجزئي W

مثال: لتكن المجموعة الجزئية من R^3

$$S = \{x_1 = (1,2,-1), x_2 = (3,4,0), x_3 = (2,-1,5)\}$$

أثبت أن: $X = (-4,-15,13) \in Span(S)$

الحل: نبحث عن α, β, γ

$$X = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$$

$$(-4,-15,13) = (\alpha+3\beta+2\gamma, 2\alpha+4\beta-\gamma, -\alpha+5\gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = -4 \\ 2\alpha + 4\beta - \gamma = -15 \\ -\alpha + 5\gamma = 13 \end{cases}$$

طريقة غاوس:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & -15 \\ -1 & 0 & 5 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow[i_1 + i_3]{-2i_1 + i_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & 7 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{3}{2}i_2 + i_3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

① $\alpha + 3\beta + 2\gamma = -4$

② $-2\beta - 5\gamma = -7$

③ $-\frac{1}{2}\gamma = -\frac{3}{2} \Rightarrow \gamma = 3$

نعوض بـ ②: $-2\beta = -7 + 15 \Rightarrow \beta = -4$

ونعوض $\alpha = 2$

$\Rightarrow X = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \Rightarrow X \in Span(S)$

الاستقلال والارتباط الخطي:

لتكن: $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة جزئية من مضاد متجهات فوق الحقل E

ولتكن $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$

نقول أن M مستقلة خطياً اذا كان

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

اذا كان أحد هذه المعادلات $(\alpha_1 \neq 0)$ أو بالرموز فإننا نقول أن

M مرتبطة خطياً.

مثال: لتكن: $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

حيث:

$x_1 (1, 1, 1, 1)$

$x_2 (0, 1, 1, 1)$

$x_3 (0, 0, 1, 1)$

$x_4 (0, 0, 0, 1)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

اثبت أن M مستقلة خطياً

الحل: نكتب التركيب الخطي:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ M مستقلة خطياً

انتهت المسألة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z