كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : احتمالات واحصاء

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

تعريف القيمة المتوسطة: وهي القيمة التي يتساوى عندها الاحتمالين التاليين:

$$P(X<x) = P(X>x)$$

$$F(x) = 1 - F(x)$$

$$2F(x) = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}$$

لدينا متغير عشوائي منقطع لتجربة حجر نرد متوازن

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

x (هو المتساوي)

$P(X<x)$ $\frac{3}{6}$ $\frac{3}{6}$ $P(X>x)$

في هذه الحالة تكون القيمة الوسطى: $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$

مثال: إذا كان X توزع مستمر بالشكل:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; \quad x \in [a,b] \\ 1 & ; \quad x \ge b \end{cases}$$

أوجد القيمة النصفية (المتوسطة)؟

الحل:

$$F(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{2}$$

$$2x - 2a = b - a \Rightarrow 2x = b + a \Rightarrow x = \frac{b+a}{2}$$

ونلاحظ أنها مساوية للتوقع الرياضي في هذا التوزيع

توزيع متغير عشوائي تابع لآخر

1) لدينا: $Y = aX$; $a > 0$ وكانت $f(x)$ تابع كثافة لـ X فإن تابع الكثافة لـ Y هو:

$$g(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

مثال: لدينا X مستمر له تابع كثافة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; 0 \le x \le 2 \\ 0 & ; \text{وما عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذٍ تابع الكثافة لـ $Y = 2X$ هو:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{\frac{x}{2}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{x}{4} = \frac{x}{8} & ; x \in [0,4] \\ 0 & ; \text{وما عدا ذلك} \end{cases}$$

---

2) إذا كان $Y = aX + b$

$$g(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

مثال: $Y = 2X - 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; [0,2] \\ 0 & ; \text{وما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{\frac{x+1}{2}}{2} = \frac{x+1}{8} & ; [-1,3] \\ 0 & ; \text{وما عدا ذلك} \end{cases}$$

- أنواع المتغيرات العشوائية المنفصلة:

1) توزيع برنولي ويأخذ قيمتين: (0,1) ويمثل النجاح والفشل ويكون جدول التوزع الاحتمالي معطى بالشكل:

$p + q = 1$;

x	0	1
$P(X=x)$	q	p
	فشل	نجاح

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثل رمي قطعة نقود للحصول على شعار أو كتابة، اذا كان الظهور شعار يكون نجاح والكتابة هو الفشل

- يكون التوقع الرياضي: $E(x) = p$
- التباين: $V(x) = E(x)^2 - (E(x))^2$

$$= p - p^2 = p(1-p) = p.q$$

- الانحراف المعياري هو جذر التباين

---

2) المتغير العشوائي الحداني (الثنائي):

وهو ناتج من تكرار تجربة برنولي ويكون عدد النجاحات المتوقعة هو n

- ويكون احتمال نجاح التجربة: $P(X=r) = \binom{n}{r} . p^r . q^{n-r}$

مثال: عند رمي قطعة نقود متوازنة 6 مرات، اكتب القانون الاحتمالي للمتغير واحسب احتمال الحصول على شعارين

الحل: $n = 6$

$$P(X=x) = \binom{6}{x} . \left(\frac{1}{2}\right)^x . \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}$$

$$P(X=2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$$

- التوقع الرياضي الحداني: $E(x) = n.p$
- التباين: $V(x) = n.p.q$

---

3) توزيع بواسون:

وهو متغير عشوائي منفصل يأخذ قيم: $(0, 1, 2, 3, \dots)$ ودالة الاحتمال له تعطى بالقانون التالي:

$$f(x) = P(X=x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}$$

حيث: λ ثابت موجب $= \lambda$, $x = 0, 1, 2, \dots$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نلاحظ أن $f(x) > 0$ وأن:

$$\sum f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = e^{0} = 1$$

التوقع الرياضي: $E(x) = \lambda$ ، التباين: $V(x) = \lambda$

مثال: اذا كان احتمال أن يكون لدواء آثار جانبية هو $\frac{1}{1000}$ ، المطلوب:

1) احسب احتمال أن يكون بين 2000 شخص هناك ثلاثة أشخاص يعانون من آثار جانبية.

2) احسب احتمال أن يكون أكثر من شخصين يعانون من آثار جانبية.

الحل: نلاحظ أن لدينا احتمال صغير جداً وقريب من الصفر وعدد المرات n كبير جداً ويمكن أن تقترب إلى اللانهاية، لذلك سنستخدم توزيع بواسون ولا سنستخدم الحالي

$$n = 2000 \quad , \quad p = 0.001$$

التوقع الرياضي: $\lambda = n.p = 2000 \times \frac{1}{1000} = 2$

$$f(x) = p(X = x) = \frac{2^x \cdot e^{-2}}{x!}$$

1) $$p(X = 3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = \frac{8}{6} \cdot e^{-2} = \frac{4}{3e^2}$$

2) $$p(X \geq 3) = 1 - [p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)]$$

$$= 1 - \left(\frac{e^{-2}}{1} + \frac{2}{1} \cdot e^{-2} + \frac{4}{2} \cdot e^{-1}\right)$$

$$= 1 - e^{-1}(1 + 2 + 1) = 1 - 5e^{-2}$$

التوزيع المشترك لمتغيرين عشوائيين :

نعرف متغيرين عشوائيين على تجربة احتمالية واحدة فنحاً نحصل على قيم مختلفة لأحداث قد تكون مستقلة أو غير مستقلة.

أولاً : في حالة متغيرات عشوائية منفصلة :

مثال : عند رمي قطعة نقود متوازنة ثلاثة مرات حصلنا على فضاء العينة

$(H,H,H) \longrightarrow 3 \longrightarrow +5$

$(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H) \longrightarrow 2 \longrightarrow +5$

$(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H) \longrightarrow 1 \longrightarrow -6$

$(T,T,T) \longrightarrow 0 \longrightarrow -6$

X : يدل على عدد الشعارات ، Y : يدل على ربح 5 نقاط إذا ظهر شعارين على الأقل وخسارة 6 نقاط في ذلك

جدول قانون الاحتمال المشترك : (القانون الزوجي (X,Y))

Y \ X	1	2	3	0	$P(Y=y)$ ← توزيع هامشي لـ Y
+5	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{4}{8}$
-6	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
$P(X=x)$ ↓ توزيع هامشي لـ X	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

توضيح : من الجدول : التوزيع الهامشي لـ X نحصل عليه بالجمع العمودي

التوزيع الهامشي لـ Y نحصل عليه بالجمع الأفقي

ثانياً : في حالة متغيرات عشوائية مستمرة :

نعرف عليهما تابع كثافة مشترك $f(x,y)$ ، X ، Y مستمرين ويحقق الشرطين :

1) $f(x,y) \geq 0$

2) $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = 1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$a < x < b$: حيث

$c < y < d$

مثال على تكامل ثنائي:

$$\int_0^1 \int_2^3 2xy^2 \, dx \, dy \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 2 < y < 3$$

$$= \int_0^1 \left(\int_2^3 2xy^2 \, dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(\left[2x \frac{y^3}{3} \right]_2^3 \right) dx = 18x - \frac{16x}{3}$$

نجري تكامل x مرة ثانية.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z