كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : السابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المتتاليات و السلاسل:

- من طرق حساب تقارب السلسلة:

1) اختبار المقارنة

2) إيجاد سلسلة المجاميع الجزئية

3) أخذ جزء من سلسلة معروف تقاربها

4) إن الحد العام للسلسلة يجب أن يسعى إلى الصفر $\lim_{x\to 0} a_n = 0$

شرط لازم و غير كاف.

مثال: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

هي متباعدة على الرغم أن الحد العام يسعى إلى الصفر

5) اختبار دالمبير: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

فإذا كان:

$l < 1$ تكون متقاربة

$l > 1$ تكون متباعدة

$l = 1$ حالة شك

- مثال: ادرس تقارب السلسلة الآتية:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots + \frac{n}{2n+1}$$

الحل:

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

حسب اختبار دالمبير:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+1}{2n+3}}{\frac{n}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2+3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n}=\frac{\infty}{\infty}$$

حسب لوبيتال: $\frac{U_n+3}{U_n+3}=1$ ⇐ حالة شك

بالعودة إلى الحد العام:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

لا يسعى إلى الصفر وبالتالي السلسلة متباعدة.

مثال: ادرس تقارب السلسلة الآتية:

$$1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

الحل: الحد العام للسلسلة يسعى إلى الصفر

حسب دالمبير:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$ فهي متقاربة

مثال: ادرس تقارب السلسلة:

$$\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}$$

$$\left(\frac{2n}{n}\right)'=\frac{2^n\ln 2}{1}\to\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}=\frac{2^n\ln 2}{1}=\infty$$

فهي متباعدة. للتأكد من ذلك يستخدم دالمبير:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1})n}{(n+1)2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^{n+1}}{2^n(n+1)}=$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 2^n\cdot 2}{2^n(n+1)} = \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$ فهي متباعدة

- اختبار كوشي:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$

إذا كانت: $p < 1$ تكون متقاربة

تكون متباعدة $p > 1$

حالة شك $p = 1$

- مثال: ادرس تقارب السلسلة الآتية:

$$S = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

حسب اختبار كوشي:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{1}{(n^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{n}}}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2n}}} = n^{-\frac{1}{2n}} = 1$ حالة شك

حسب دالمبير:

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$ حالة شك

- سلاسل القوى:

أولاً: سلسلة القوى وتعيين قطر التقارب نقطي بالشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

وإيجاد نصف قطر التقارب:

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

مجال التقارب $[-R, R]$

- مثال: احسب نصف قطر التقارب وأوجد مجال التقارب للسلسلتين الآتيتين:

a) $1 + x + x^2 + \dots + x^n$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

b) $\frac{2x}{1} + \frac{(2x)^2}{2} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n}$

الحل:

a) $a_n = 1 \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{1} = 1$

مدى التقارب $[-1, 1]$

b) $a_2 = \frac{2^n}{n} \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{n \cdot 2^{n+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{n \cdot 2^n \cdot 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ بضرب الطرفين

مدى التقارب $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

ثانياً: نشر الدوال حسب تايلور وماك لوران:

النشر: هو استبدال الدالة ضمن شروط خاصة لسلسلة قوى بشرط أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق.

- كيفية النشر بجوار النقطة $(x = a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(z) = 0$$

- مثال: انشر الدالة: $f(x) = \ln x$ حسب قوى $(x-1)$ أي $a = 1$

الحل:

$$f(a) = \ln x \Big|_{x=1} = \ln(1) = 0$$

$$f'(a) = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(a) = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f'''(a) = \frac{2}{x^3}\Big|_{x=1} = 2$$

$$f''''(a) = -\frac{6}{x^4}\Big|_{x=1} = -6$$

$$f^{(5)}(a) = \frac{24}{x^5}\Big|_{x=1} = 24$$

$$\ln x = 0 + \frac{(x-1)}{1!} - \frac{(x+1)^2}{2!} + 2\frac{(x-1)^3}{3!} - 6\frac{(x-1)^4}{4!} + 24\frac{(x-1)^5}{5!}$$

$$= \frac{x-1}{1} - \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

- لإيجاد السلسلة حسب ماك لوران:

حول الصفر $x=0$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = f^{(n)}(0) = 0$$

- ملاحظة: استنتج نشور الصفر حسب ماك لوران للدوال التالية:

1) $\ln(1+x)$ 2) $\sin x$ 3) $\cos x$

4) e^x 5) e^{-x} 6) e^{ix} 7) e^{-ix}

الحل:

1) $\ln(1+x) \Rightarrow f(0) = \ln(1) = 0$

$$f'(0) = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=0} = 1$$

$$f''(0) = -\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_{x=0} = -1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f'''(0) = \frac{2}{(1+x)^3}\Big|_{x=0} = 2$$

$$f''''(0) = -\frac{6}{(1+x)^5}\Big|_{x=0} = -6$$

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{6x^4}{4!} + \dots$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}$$

الباقي بنفس الطريقة

تمرين: استنتج العلاقة:

1) $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

2) $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

الحل:

1) $e^{ix}\Big|_{x=0} \quad 1 + i\frac{x}{1!}$

$$f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = ie^{ix}\Big|_{x=0} = i$$

$$f''(0) = i^2 e^{ix}\Big|_{x=0} = -1 \quad , \quad f'''(0) = -ie^{ix}\Big|_{x=0} = -i$$

$$e^{ix} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5}\right)$$

الثانية بنفس الطريقة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z