كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : ميكانيك فيزيائي١

المحاضرة :**7+8**/ن+ع/ د. صالح

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

10

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحاضرة الرابعة : مبادئ التحريك

درسنا في الفصلين السابقين الحركة، فعرفنا سرعة نقطة مادية وتسارعها وعرفنا كيف نصف حركة نقطة مادية في جملة مرجعية ما، لكننا لم نهتم أبداً بمسببات تلك الحركة. فما الذي يجعل النقطة المادية تتحرك؟ وكيف نستنتج القوانين التي تصف الحركة؟

★ التأثير المتبادل بين جملتين

نقول عن جملتين ماديتين Σ_1 و Σ_2 إنهما في تأثير متبادل عندما يؤدي إحداث تغير ما في إحداهما إلى حدوث تغير في الأخرى. جميع التأثيرات المتبادلة بين الجمل المادية في الطبيعة تتلاشى عندما تصبح المسافة الفاصلة بين الجملتين الماديتين لانهائية (أي كبيرة جداً بالنسبة لأبعاد Σ_1 و Σ_2).

- نصف هذا التأثير المتبادل بمقدار شعاعي ندعوه القوة. ونعرف القوة بأنها مقدار شعاعي يصف تأثير قادر على توليد أو تغيير حركة نقطة مادية. أو قادر على تشويه جسم مادي. وتجدر الإشارة هنا إلى أننا نصف بعض التأثيرات المتبادلة أحياناً بمقدار سلمي يدعى الطاقة الكامنة كما هو حال التأثير النووي القوي الذي سنراه لاحقاً.

- نقول عن جملة ما إنها معزولة إذا لم تكن خاضعة لأي تأثير خارجي. فإذا كانت محصلة القوى الخارجية المؤثرة في الجملة المادية مساوية الصفر فإننا نقول عنها إنها جملة شبه معزولة أو معزولة.

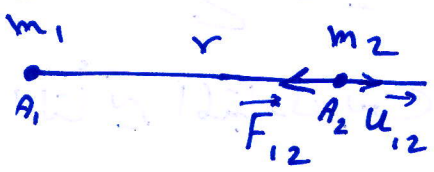
★ التأثيرات الأساسية في الطبيعة:

اتفق جمهور الفيزيائيين على أنه يمكننا حالياً رد جميع التأثيرات المتبادلة بين الجمل المادية في الطبيعة إلى أربعة تأثيرات أساسية، تتميز جميعها بأنها تتناهى نحو الصفر عندما تصبح المسافة بين الجمل المتأثرة فيما بينها لانهائية

1 - تأثير الجاذبية الكوني :

يعد تأثير الجاذبية واحدا من أهم الإنجازات التي قدمها نيوتن لوصف القوى في الطبيعة فهو يرى أن كل جسم مادي يتمتع بخاصة تدعى الكتلة الثقالية، وهي تساوي الكتلة العطالية للجسم المدروس.

- ينص قانون الجاذبية الكوني على مايلي: إذا تأملنا جسمين، كما في الشكل أحدهما واقع في A_1 وكتلته الثقالية m_1 والآخر واقع في A_2 وكتلته الثقالية m_2 وإذا كانت المسافة بينهما هي $r = A_1A_2$



فإن كلاً منها يجذب الآخر بقوة تتناسب عكساً مع مربع البعد بينهما فإذا فرضنا $\vec{u}_{12}$ شعاع واحد محمولاً على A_1A_2 ومتجهاً من A_1 إلى A_2 فإنه يمكننا التعبير عن القوة التي يؤثر بها الجسم A_1 في A_2 بالعلاقة التالية:

قانون الجاذبية الكوني

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

حيث G ثابت، يدعى ثابت الجاذبية الكوني، وقيمته في جملة الواحدات الدولية S.I هي:

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$$

- لقد استطاع نيوتن، بناءً على هذا القانون في أن يفسر حركة الكواكب المجموعة الشمسية تفسيراً فائق الدقة.

- لنفترض الآن جسماً نقطياً، كتلته m موجوداً في نقطة O، ولتكن A نقطة ما في الفضاء. بحيث $OA = r$ وليكن $\vec{u}_r$ الشعاع الواحدي على $\vec{OA}$ إذا وضعنا في A جسماً نقطياً آخر كتلته m' فإنه سيخضع للقوة

$$\vec{F}' = -G\frac{m m'}{r^2}\vec{u}_r$$

وإذا استبدلنا بهذا الجسم، جسماً نقطياً آخر، كتلته m'' فإن القوة المؤثرة في m'' هي:

$$\vec{F}'' = -G\frac{m m''}{r^2}\vec{u}_r$$

- بمقارنة هاتين القوتين. نجد اختلافاً واحد فقط في الكتلة m' أو m'' نستنتج أنه يمكننا التعبير عن هاتين القوتين كجداء الكتلة المتأثرة في مقدار شعاعي لا يتعلق بهاتين الكتلتين المتأثرتين، بل يتعلق فقط بالكتلة المؤثرة m وبموقع النقطة A في الفضاء وهو:

حقل الجاذبية الناجم عن كتلة نقطية

$$\vec{g}(r) = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r$$

- يدعى هذا المقدار الشعاعي حقل الجاذبية الذي تولده الكتلة m في الفضاء على بعد r منها ويعتبر حقل الجاذبية ذا فائدة كبيرة في دراسة قوى الجاذبية

2 - التأثير الكهربائي:

تتألف المادة من ذرات تحوي الكترونات وبروتونات إضافة إلى النترونات وفي الحالة الطبيعية يكون عدد الالكترونات مساوياً عدد البروتونات فإذا ما اختل هذا التوازن، أصبحت المادة مشحونة كهربائياً بشحنة سالبة أو موجبة.

- نلاحظ تجريبياً أن الأجسام المتماثلة الإشارة في الشحنة تتنافر فيما بينها وأنها تتجاذب إذا كانت شحناتها من إشارتين مختلفتين. تجدر الإشارة هنا إلى أن أهم شحنة في الطبيعة هي شحنة الالكترون ونسميها الشحنة الأولية وقيمتها $e = 1,6 \times 10^{-19}[C]$ وعندما نشحن جسماً ما كهربائياً فإننا في الحقيقة ننتزع عدداً من الكتروناته أو نضيف عدداً من الالكترونات إليه، فتكون شحنته مكماة أي أنها تساوي عدد صحيحاً من e

- لقد أثبت كولون أن التأثير المتبادل بين كرتين مشحونتين كهربائياً يتناسب عكساً مع مربع البعد بينهما، وأنه يتناسب طرداً مع جداء شحنتيهما فإذا تأملنا جسمين A_1 و A_2 مشحونين كهربائياً بشحنتين q_1 و q_2 على الترتيب

والمسافة بينهما $r = A_1A_2$ فإذا أثر الجسم A_1 في الجسم A_2 بقوة $\vec{F}_{12}$ تعطى بالعلاقة التالية

قانون كولون $\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$

حيث $\vec{u}_{12}$ شعاع واحدة محمول على A_1A_2 ومتجه من A_1 إلى A_2 ، K ثابت يتعلق بالوسط الذي توجد فيه هاتان الشحنتان يعطى K في الخلاء بالعلاقة $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ حيث ε_0 ثابت عزل الخلاء (سماحية الخلاء)

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \ m.F^{-1} \quad , \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \ F.m^{-1}$$

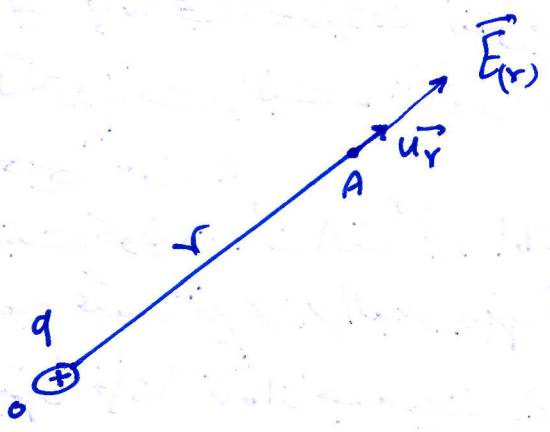
تقاس السماحية بـ فاراد/متر

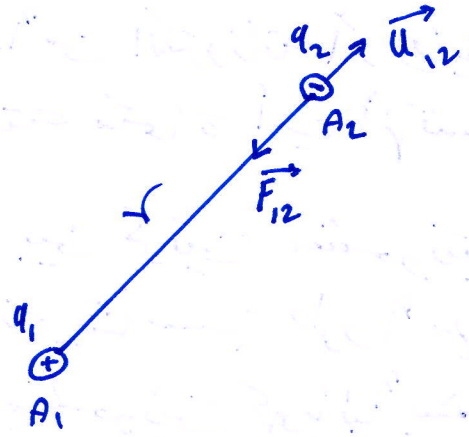
- لنتأمل الآن شحنة نقطية q موضوعة في نقطة O ، ولتكن A نقطة ما في الفضاء ، بحيث $OA = r$ وليكن $\vec{u}_r$ شعاعا "واحديا" على $\vec{OA}$. إذا وضعنا في A شحنة نقطية q' فإنها ستخضع للقوة

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_r$$

فإذا بدلنا q' بشحنة أخرى q'' فإن القوة المؤثرة في q'' هي

$$\vec{f}'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq''}{r^2} \vec{u}_r$$





- بمقارنة هاتين القوتين نجد اختلافاً واحداً فقط في الشحنة q أو q' فنستنتج أنه يمكننا التعبير عن هاتين القوتين كجداء الشحنة المتأثرة (q أو q') في شعاع لا يتعلق بماتين الشحنتين المتأثرتين بل يتعلق فقط بالشحنة المؤثرة q وبموقع النقطة A وهو:

الحقل الكهربائي الناجم عن شحنة نقطية

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

- يعتبر الحقل الكهربائي ذا فائدة كبيرة في دراسة القوى الكهربائية خاصة عندما تكون هذه القوى معقدة ومتبادلة بين أجسام مشحونة متعددة. عندما نضع شحنة نقطية q في الفضاء فإنها ستتأثر بوجود هذا الحقل الكهربائي وستخضع للقوة $\vec{F} = q\vec{E}$

3- التأثير النووي القوي:

هو التأثير المتبادل بين النكلونات (البروتونات والنترونات) لإبقائها بعضها مع بعض داخل النواة إذ يتطلب هذا التأثير أن يكون قوياً للتغلب على التأثير الكهربائي التدافعي الهائل بين البروتونات وهذا التأثير هو الأقوى بين التأثيرات الأساسية لكن هذا التأثير لا يتناسب عكساً مع مربع البعد مثل القوة الكهرطيسية بل يتمتع بمدى قصير جداً لا يتعدى أبعاد النواة وهو من رتبة $10^{-15}\,m$

4- التأثير النووي الضعيف:

يفسر التفاعلات النووية وانشطار النواة، مثل الإشعاع β

★ مبدأ العطالة ، تعريف الجملة الغاليلية

1 - نص مبدأ العطالة (قانون نيوتن الأول): توجد على الأقل جملة مرجعية متميزة واحدة تكون فيها حركة أية نقطة مادية معزولة مستقيمية منتظمة . نوعو هذه الجملة المرجعية عندئذٍ جملة غاليلية أو عطالية.

2 - لنتأمل الآن جملة مرجعية R تتحرك حركة انسحابية مستقيمية منتظمة بسرعة $\vec{v}_{R/R_0}$ بالنسبة لجملة غاليلية أخرى R_0. فإذا كانت M نقطة مادية معزولة فإن حركتها بالنسبة لـ R_0 وبحسب نص مبدأ العطالة هي حركة مستقيمية منتظمة ، ولتكن $\vec{v}_{M/R_0}$ سرعة M بالنسبة للجملة R_0 (السرعة المطلقة) بحسب علاقة تركيب السرعات وبفرض $\vec{v}_{M/R}$ سرعة M بالنسبة لـ R (السرعة النسبية) فإننا نجد:

$$\vec{v}_{M/R_0} = \vec{v}_{M/R} + \vec{v}_{R/R_0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R_0} - \vec{v}_{R/R_0}$$

وهو شعاع ثابت لأن كلتا السرعتين $\vec{v}_{M/R_0}$ و $\vec{v}_{R/R_0}$ ثابت أيضاً ولذا فحركة النقطة المادية المدروسة هي أيضاً مستقيمية منتظمة بالنسبة للجملة R وعلى هذا فإن الجملة R هي جملة غاليلية.
فكل جملة مرجعية تتحرك حركة مستقيمية منتظمة بالنسبة لجملة مرجعية غاليلية هي أيضاً جملة غاليلية

* المبدأ الأساسي في التحريك

1 - مفهوم الكتلة العطالية:

لنجر التجربة التالية على وسادة هوائية: لنطبق على جسم ما قوة أفقية ثابتة شدتها F_1 فيتحرك الجسم حركة مستقيمة متسارعة، وليكن تسارعها γ_1. ثم لنعد هذه التجربة على الجسم نفسه، فنخضعه لقوة شدتها F_2، مختلفة عن F_1 فنحصل على قيمة مختلفة للتسارع ولتكن γ_2 نلاحظ عندئذ أن

$$\frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \ldots\ldots = \text{ثابت}$$

- نستنتج أن نسبة القوة المطبقة إلى التسارع المكتسب لها القيمة نفسها مهما كانت شدة القوة المطبقة ندعو هذا الثابت الكتلة العطالية للجسم المدروس ونرمز لها بـ m وعلى هذا فإن شدة القوة المؤثرة في جسم ما، تتناسب طرداً مع تسارعه $F = m\gamma$ وذلك في هذه الحالة المميزة لحركة مستقيمة فقط. يعمم المبدأ الأساسي من التحريك هذه النتيجة على الحركات المنحنية أيضاً.

- الكتلة العطالية هي مقدار سلمي يعبر عن مدى ممانعة الجسم لتغيير حركته. ونقصد بهذا التغيير، في الحالة العامة، الانتقال من السكون إلى الحركة أو تغيير مسار الحركة أو تغيير سرعة الحركة أو تسارعها

2 - كمية الحركة:

هي مقدار شعاعي نرمز له غالباً بـ $\vec{P}$ يربط بين الكتلة العطالية والسرعة وتعطى بالعلاقة

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

5- نص المبدأ الأساسي في التحريك (قانون نيوتن الثاني)

في أي جملة مرجعية غاليلية R تكون محصلة القوى المؤثرة في نقطة مادية مساوية إلى مشتق كمية الحركة بالنسبة للزمن في تلك الجملة.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

اذا كانت كتلة النقطة المادية ثابتة بمرور الزمن فإن مشتق كمية الحركة في الجملة R هو

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

طبعاً الدراسة تتم على كتل ثابتة لا تتغير بمرور الزمن

6- مبدأ تساوي الفعل ورد الفعل (قانون نيوتن الثالث)

بالعودة إلى تأثير التجاذب الكوني نلاحظ أن $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ وكذلك الحال في التأثير الكهربائي. يأتي مبدأ تساوي الفعل ورد الفعل ليعمم هذه النتيجة على كل القوى المتبادلة بين جسمين فهو ينص على مايلي:

- إذا أثر جسم A_1 في جسم A_2 بقوة $\vec{F}_{12}$ فإن A_2 يؤثر في A_1 بقوة تساويها في الشدة وتعاكسها في الإتجاه

- نتيجة مهمة: إذا اعتبرنا جملة معزولة مؤلفة من نقطتين ماديتين في تأثير متبادل $[A_1, A_2]$ فإن كمية الحركة الكلية لهذه الجملة مصونة أي أن

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = cte$$

وهذه المصونية مهمة جداً في دراسة حوادث التصادم. نبرهن على ذلك بتطبيق المبدأ الأساسي في التحريك على هاتين النقطتين المادتين كل على حدة

$$\frac{dP_1}{dt} = \vec{F}_{21} \quad \text{و} \quad \frac{dP_2}{dt} = \vec{F}_{12}$$

بجمع المعادلتين

$$\frac{d\vec{P_1}}{dt} + \frac{d\vec{P_2}}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

أي أن:

$$\frac{d(\vec{P_1} + \vec{P_2})}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{P_1} + \vec{P_2} = \vec{cte}$$

5 - نظرية العزم الحركي: وسيلة مهمة مساعدة للمبدأ الأساسي في التحريك فهي تسمح بإيجاد معادلة الحركة، خاصة في حالة نقطة مادية تتحرك حول محور ما.

a - العزم الحركي: لتكن M نقطة مادية، كتلتها m تتحرك في جملة غاليلية R مبدؤها O. نعرف العزم الحركي لـ M بالنسبة لـ O بأنه المقدار الشعاعي التالي:

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

حيث $\vec{p}$ شعاع كمية حركة النقطة المادية، و $\vec{v}$ سرعة هذه النقطة بالنسبة لـ R يقدر العزم الحركي $Kg.m^2.s^{-1}$

b - عزم قوة: لتكن M نقطة مادية كتلتها m، تتحرك في جملة غاليلية R مبدؤها O، ولتكن $\vec{F}$ قوة مؤثرة في M نعرف عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة لـ O بالمقدار الشعاعي التالي

عزم قوة بالنسبة لـ O

$$\overrightarrow{M_O(F)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$

يقدر عزم القوة بـ $N.m$

ملاحظة: "كل قوة يمر حاملها من O يكون عزمها بالنسبة لـ O معدوما"

c- نظرية العزم الحركي: نلاحظ باشتقاق علاقة تعريف العزم الحركي بالنسبة للزمن:

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

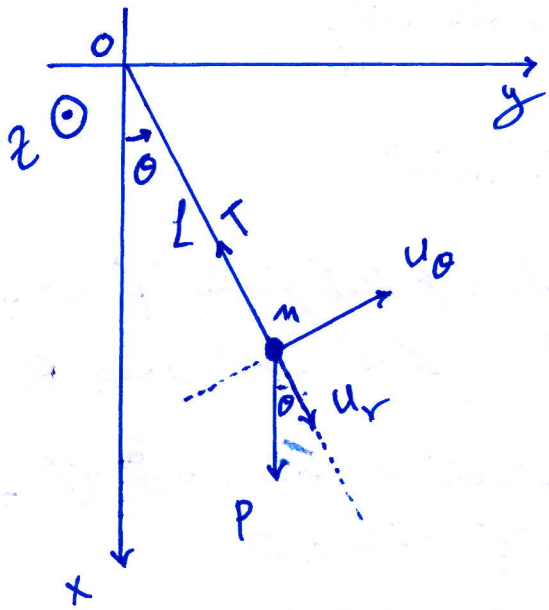
$$= \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$$= 0 + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

نحصل بذلك على علاقة نظرية العزم الحركي وهي:

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{M_O(F)}$$ نظرية العزم الحركي

d- تطبيق: النواس البسيط



يتكون هذا النواس من كرة صغيرة كتلتها m معلقة بطرف خيط وتثبت الطرف الآخر للخيط في نقطة O كما هو مبين في الشكل

لنوجد المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق نظرية العزم الحركي

نلاحظ في البداية أن العزم الحركي للكرة بالنسبة لـ O هو:

$$\vec{L_o} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = (l\vec{u_r}) \wedge (ml\dot{\theta}\vec{u_\theta})$$

$$= ml^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

نستنتج من ذلك أن:

$$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{u_z}$$

تخضع الكرة لقوة ثقل $\vec{P}$ ولتوتر الخيط $\vec{T}$. نلاحظ مباشرة أن عزم القوة $\vec{T}$ يساوي الصفر لأن القوة $\vec{T}$ محمولة على $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = 0$$

في حين نلاحظ من الشكل أن قوة الثقل تعطى بالعلاقة

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\vec{u_r} - mg\sin\theta\vec{u_\theta}$$

ولذا فإن عزم قوة الثقل بالنسبة لـ O هو:

$$\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\vec{u_r} \wedge (mg\cos\theta\vec{u_r} - mg\sin\theta\vec{u_\theta})$$

$$= -mgl\sin\theta\vec{u_z}$$

نصل أخيراً بتطبيق نظرية العزم الحركي

$$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{F})$$

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{u_z} = -mgl\sin\theta\vec{u_z}$$

نستنتج من ذلك المعادلة التفاضلية للحركة وهي

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

6- أمثلة على بعض القوى :

9- دافعة أرخميدس : $\vec{F} = \rho_\ell V_\ell g \vec{k}$

ρ_ℓ الكتلة الحجمية للمائع

V_ℓ حجم الجزء المدروس من المائع

g تسارع الجاذبية الأرضية

$\vec{k}$ شعاع واحدة شاقولي متجه نحو الأعلى

6- قوى الاحتكاك المائع : عندما يتحرك جسم صلب في مائع فإن جزيئات هذا المائع تصطدم بسطح هذا الجسم فينتج عن ذلك قوى معاكسة للحركة لا يوجد قانون بسيط يعبر عن هذه القوة ، ولكن يمكننا التعبير عنه بالعلاقة

$$\vec{F} = -k \vec{v}$$

k ثابت موجب يتعلق بطبيعة المائع وبالسطح الظاهري للجسم حيث $k = 6\pi r \eta$: η ثابت يعبر عن لزوجة المائع المعتبر

r نصف قطر الجسم الكروي بحالة خاصة

c- قوى الاحتكاك الصلب :

$$f = \mu_s N$$

μ_s ثابت موجب يدعى عامل الاحتكاك السكوني

N شدة القوة الناظمية

6- قانون هوك : قانون المرونة

$$\vec{f} = -k (\ell - \ell_0) \vec{u}$$

$\vec{u}$ شعاع واحدي ، ℓ_0 الطول الحر للنابض ، ℓ طوله بعد الإزاحة

k ثابت يتعلق بالنابض ندعوه ثابت مرونة النابض

7 - توازن نقطة مادية :

a- تعريف : نقول عن نقطة مادية M إنها في حالة توازن في جملة مرجعية R إذا كانت سرعتها مساوية للصفر دوماً في هذه الجملة

$$\vec{v}_{M/R} = 0 \iff M \text{ في حالة توازن في } R$$

b- شرط التوازن : نستنتج أنه لكي تكون نقطة مادية في حالة توازن في جملة مرجعية R يجب أن تكون محصلة القوى المؤثرة في هذه النقطة المادية معدومة في الجملة المعتمدة

$\vec{\gamma}_{M/R} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = 0$ فلأن السرعة معدومة $\vec{v}_{M/R} = 0$ دوماً فإن $\sum \vec{F} = 0$ ولذا

لكنه غير كاف ، إذ يمكن لمحصلة القوى أن تكون معدومة في حين تكون النقطة المادية في حالة حركة وعندئذٍ تكون حركتها مستقيمة منتظمة .

c- أنواع التوازن : 1- توازن مستقر : يكون التوازن مستقراً عندما تظهر قوة تؤثر في النقطة المادية محاولة إعادتها إلى موقع التوازن بعد إزاحتها عنه بقدر صغير .

$$\Delta f_x < 0 \qquad \left(\frac{df_x}{dx}\right)_{x=x_0} < 0$$

أي تظهر قوة سالبة تحاول إعادة تلك النقطة إلى موقع توازنها x_0

2- توازن قلق : يكون التوازن قلقاً عندما تظهر قوة تؤثر في النقطة المادية محاولة إبعادها عن موقع توازنها بعد إزاحتها عنه بقدر صغير

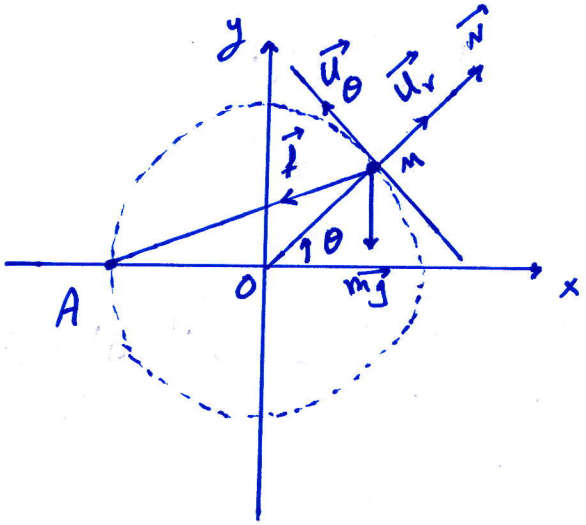
$$\Delta f_x > 0 \qquad \left(\frac{df_x}{dx}\right)_{x=x_0} > 0$$

3- توازن مطلق : يكون التوازن مطلقاً عندما لاتظهر أية قوة تؤثر في النقطة المادية بعد إزاحتها عن موقع توازنها بقدر صغير.

$$\left(\frac{dF_x}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$$

مثال : دراسة توازن نقطة مادية :

- لتكن نقطة مادية M حركتها مقيدة على حلقة موجودة في مستو شاقولي oxy ، يمكننا أن نتخيل M خاتماً يحيط بسلك دائري. ليكن O مركز الحلقة و R نصف قطرها. لنفترض أن M تخضع لقوة تشدها نحو نقطة ثابتة A من الحلقة وهي تعطى بالعلاقة $\vec{f} = -K\,\vec{AM}$ حيث K ثابت موجب لندرس ونبحث عن مواقع التوازن لهذه النقطة المادية



- نلاحظ أنه يمكن تحليل هذه المسألة ببعد واحد فقط. نقصد بذلك أنه ثمة متحول واحد فقط يكفي لتحديد موقع النقطة المادية هنا، ألا وهو الزاوية التي يصنعها شعاع الموضع مع المحور ox أي $\theta = (ox, \vec{OM})$

- نلاحظ أن دراستنا لحركة M في الاحداثيات القطبية خيار موفق. ولهذا علينا معرفة القوى المؤثرة في M تخضع M لقوة ثقلها $m\vec{g}$ وهي شاقولية يمكننا صياغتها في الجملة القطبية حسب العلاقة :

$$m\vec{g} = -mg\sin\theta\,\vec{u}_r - mg\cos\theta\,\vec{u}_\theta$$

كما تخضع M لقوة الشد نحو A وهي

$$\vec{f} = -K\,\vec{AM} = -K\,(\vec{OM} - \vec{OA})$$

نلاحظ من الشكل $\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}_r$

$$\overrightarrow{OA} = -R\cos\theta\,\vec{u}_r + R\sin\theta\,\vec{u}_\theta$$

وعلى هذا:

$$\vec{f} = -(kR + kR\cos\theta)\vec{u}_r + kR\sin\theta\,\vec{u}_\theta$$

وتخضع M أيضاً لقوة رد فعل الحلقة عليها، $\vec{N}$، وهي قوة عمودية على الحلقة ولا بد أن توجد في المستوي Oxy لأن الحركة تحدث في هذا المستوي فقط، ولذا فإن هذه القوة محمولة على $\vec{u}_r$:

$$\vec{N} = N(\theta)\,\vec{u}_r$$

حيث $N(\theta)$ تابع للزاوية θ يمثل مركبة هذه القوة على $\vec{u}_r$ وله قيمة حقيقية قد تكون سالبة أو موجبة.

- نجمع هذه القوى لحساب محصلة القوى $\vec{F}$ المؤثرة في M:

$$\vec{F} = [-mg\sin\theta - kR - kR\cos\theta + N(\theta)]\,\vec{u}_r + (-mg\cos\theta + kR\sin\theta)\,\vec{u}_\theta$$

ولهذه المحصلة مركبتان إحداهما على $\vec{u}_r$، والأخرى $\vec{u}_\theta$ وهما على الترتيب F_r ، F_θ

نحصل على مواقع التوازن عندما $\vec{F} = \vec{0}$ أي عندما تساوي كل من هاتين المركبتين الصفر أي عندما تتحقق العلاقتان الآتيتان معاً:

$$-mg\sin\theta - kR - kR\cos\theta + N(\theta) = 0$$

$$-mg\cos\theta + kR\sin\theta = 0$$

تسمح لنا العلاقة الأولى منهما بحساب رد الفعل $N(\theta)$ عند موقع التوازن، على حين تعطينا العلاقة الثانية مواقع التوازن:

$$\tan\theta = \frac{mg}{KR}$$

وهي معادلة تقبل حلين، يقع أحدهما وليكن θ_0 في الربع الأول من الدائرة المثلثية بحيث $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ويساوي الحل الآخر $\theta_0 + \pi$ وهو يقع في الربع الثالث.

ولدراسة استقرار التوازن في هذين الموقعين، نلاحظ أن ازاحة صغيرة $\Delta\theta$، للنقطة المادية عن موقع توازنها ستؤدي إلى ظهور قوة صغيرة تتناسب مع قيمة مشتق المركبة المحاسية للقوة وهي:

$$\Delta F_\theta = \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_0} \times \Delta\theta$$

لنحسب هذا المشتق باشتقاق F_θ

$$\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} = mg\sin\theta + KR\cos\theta$$

$$= KR\cos\theta\left[\frac{mg}{KR}\tan\theta + 1\right]$$

وعند موقع التوازن θ_0 سيكون لدينا:

$$\left(\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = KR\cos\theta_0\left[1 + \left(\frac{mg}{KR}\right)^2\right]$$

ولأن $\cos\theta_0 > 0$ في الربع الأول فإن

$$\left(\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_0} > 0$$

ويكون موقع التوازن الموافق لـ θ_0 موقع توازن قلق. على حين:

$$\left(\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_0+\pi} = KR\cos(\theta_0+\pi)\left[1+\left(\frac{mg}{KR}\right)^2\right] < 0$$

لأن $\cos(\theta_0+\pi) = -\cos\theta_0 < 0$ ولذا يكون الموقع $\theta_0+\pi$ موقع توازن مستقر.

مثال: يتحرك جسم حركة مستقيمة على محور ox بتأثير قوى تتعلى محصلتها في الجملة الدولية بالعلاقة: $\vec{F} = (-x^2+2x)\vec{i}$ حدد مواقع التوازن ونوع كل منها ثم ادرس $f(x)$ بدلالة x.

الحل: نجد مواقع التوازن بجعل $\vec{F} = \vec{0}$ فنحصل على:

$$-x^2+2x=0 \quad \Rightarrow \quad -x(x-2)=0$$

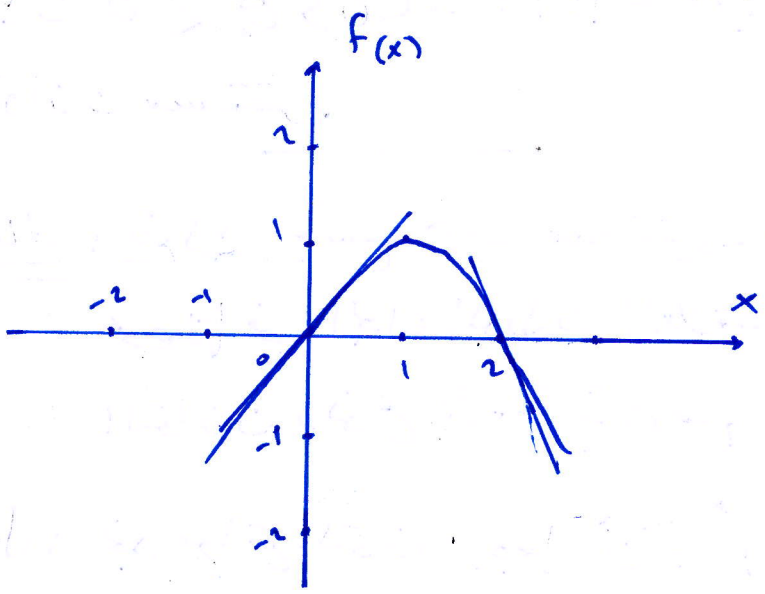
ومنه نستنتج أنه يوجد موقعا توازن لهذا الجسم: الأول عند $x=0$ والآخر عند $x=2m$.

ولتحديد نوع التوازن نبحث عن ميل منحنى القوة في جوار موقع التوازن أي نبحث عن إشارة المشتق الآتي عند كل موقع من مواقع التوازن

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = -2x+2$$

فنلاحظ أن $F'(0) = +2 > 0$ ومن ثم فإن $x=0$ موقع توازن قلق ونجد أيضاً أن $F'(2) = -2 < 0$ لذا فإن $x=2$ موقع توازن مستقر.

يبين في الشكل الآتي منحنى $f(x)$ (مركبة محصلة القوى على ox) بدلالة x في هذا المثال، نلاحظ بوجه خاص أن ميل مماس هذا المنحنى عند $x = 0$ هو ميل موجب (توازن قلق) في حين ميله عند $x = 2$ هو ميل سالب (توازن مستقر).



مكتبة A to Z