كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : ميكانيك فيزيائي ١

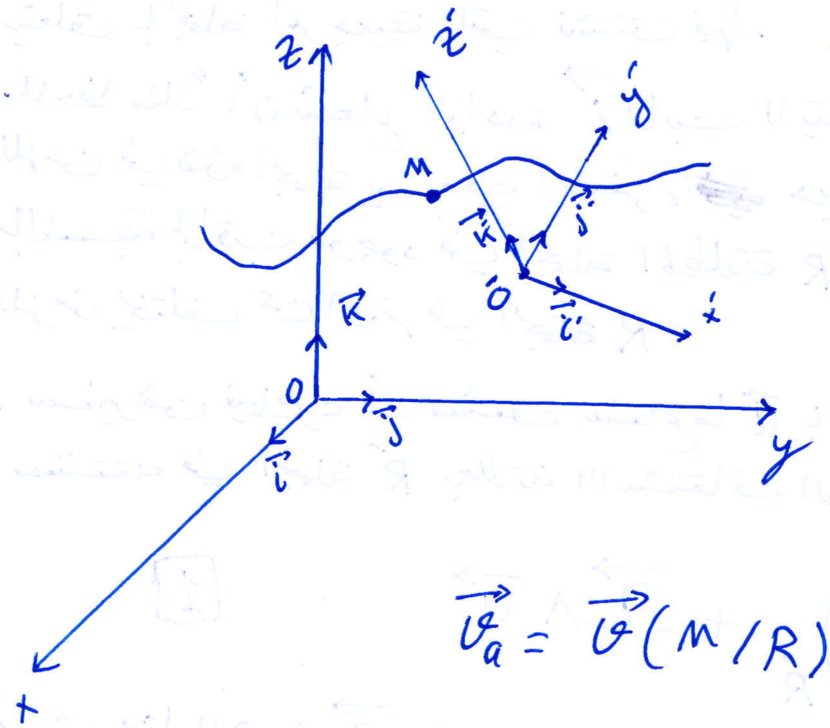
المحاضرة :6+5/ن+ع/ د. صالح

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المحاضرة الثالثة : الحركة النسبية   ميكانيك فيزيائي

- لتكن M نقطة مادية تتحرك في الفراغ، ولتكن R و $\acute{R}$ جملتين مرجعيتين متحركتين إحداهما بالنسبة للأخرى. قد تكون حركة $\acute{R}$ بالنسبة لـ R انسحابية أو دورانية أو انسحابية ودورانية معاً. ولتكن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أشعة الواحدة في الجملة R و O مركزها ولتكن $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ أشعة الواحدة في الجملة $\acute{R}$ و $\acute{O}$ مركزها



- ندعو اصطلاحاً حركة M بالنسبة للجملة R الحركة المطلقة ونرمز لسرعة M فيها بـ $\vec{v}_a$ أو $\vec{v}(M/R)$ ونرمز لتسارعها في هذه الجملة بـ γ_a أو $\gamma(M/R)$

- حيث يكتب شعاع السرعة المطلقة والتسارع المطلق بالشكل

$$\vec{v}_a = \vec{v}(M/R) = \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}\right)_R$$

$$\gamma_a = \gamma(M/R) = \left(\frac{\partial v_a}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial^2 OM}{\partial t^2}\right)_R$$

نقصد بذلك أن الاشتقاق بالنسبة للزمن يجري في الجملة المرجعية R فإذا كان شعاع الموضع في R :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

عندئذ

$$\vec{v}_a = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}_a = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

حيث أشعة الواحدة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ثابتة في الجملة R ومشتق كل منها بالنسبة للزمن في الجملة R يساوي الصفر

- كما ندعو اصطلاحاً أيضاً حركة M بالنسبة للجملة R' الحركة النسبية ونرمز لسرعة M فيها بـ $\vec{v}(M/R')$ أو $\vec{v_r}$ ، ونرمز لتسارعها في هذه الجملة بـ $\vec{\gamma_r}$ أو $\vec{\gamma}(M/R')$.

* علاقة اشتقاق أساسية :

- ليكن $\vec{u}$ شعاعاً متغيراً مع الزمن . إن مشتق هذا الشعاع بالنسبة للزمن يتعلق بالجملة المرجعية التي نشتق فيها .

نلاحظ مثلاً أن شعاع الواحدة $\vec{i}$ ثابت لا يتغير في الجملة R' ولذا فمشتقه بالنسبة للزمن في هذه الجملة يساوي الصفر ، على حين يتغير هذا الشعاع بمرور الزمن بالنسبة لمراقب موجود في الجملة المطلقة R ولهذا فمشتق الشعاع $\vec{i}$ بالنسبة للزمن يختلف عن الصفر في الجملة R .

- سنبرهن فيما يلي أن مشتق شعاع ما $\vec{u}$ بالنسبة للزمن في الجملة R يرتبط مع مشتقه في الجملة R' بعلاقة الاشتقاق الأساسية

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{u} \qquad \boxed{1}$$

حيث يمثل الشعاع $\vec{\Omega}$ شعاع دوران الجملة R' بالنسبة للجملة R ، لذلك نرمز له أحياناً بـ $\vec{\Omega}(R'/R)$. سنجد بوجه خاص كما في البرهان الآتي ، وهذا ما يجب تذكره على الدوام أن الحد المتمم ، $\vec{\Omega} \wedge \vec{u}$ في العلاقة 1 ناجم عن تغير اتجاهات أشعة الواحدة في R' بسبب دوران R' بالنسبة لـ R .

- وبوجه خاص عندما تدور R' بالنسبة لـ R حول المحور oz بسرعة زاوية w يكون شعاع الدوران محمولاً على oz بحيث $\vec{\Omega} = w\vec{K}$.

- وبوجه عام يكون لشعاع الدوران مركبة على كل محور (مثل $\vec{u_1}$) من محاور دوران R' بالنسبة لـ R ، وتلك المركبة تساوي مشتق زاوية الدوران (مثل θ_1) حول ذلك المحور $(\vec{u_1})$.

- حيث لشعاع الدوران مركبة على كل محور دوران تساوي مشتق زاوية الدوران حول ذلك المحور

$$\vec{\Omega}(R'/R) = \dot{\theta}_1 \vec{u}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{u}_2 + \cdots$$

- في حالة خاصة، عندما تكون حركة R' انسحابية بالنسبة لـ R يكون $\vec{\Omega}=0$ وتصبح العلاقة 1 بالشكل

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{R'}$$

- في العلاقة 1 إذا عرفنا مركبات شعاع ما $\vec{u}$ في الجملة R' فإن هذه العلاقة ستمكننا من حساب المركبات في R' الخاصة بمشتق هذا الشعاع بالنسبة للزمن في جملة أخرى R.

- لإثبات العلاقة السابقة نكتب أولاً الشعاع $\vec{u}$ بدلالة مركباته x, y, z في الجملة R، وذلك وفق العلاقة التالية:

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{K}$$

كما يمكننا أن نعبر عن هذا الشعاع بدلالة مركباته x', y', z' في الجملة R'

$$\vec{u} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{K'}$$

وباشتقاق هذه العلاقة الأخيرة في الجملة R نحصل على:

$$\boxed{2}\quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_R = \dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{K'} + x'\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right)_R + y'\left(\frac{d\vec{j'}}{dt}\right)_R + z'\left(\frac{d\vec{K'}}{dt}\right)_R$$

نتعرف مباشرة في هذه العلاقة بمشتق الشعاع $\vec{u}$ بالنسبة للزمن في الجملة R' حيث تكون أشعة الواحدة $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{K'}$ ثابتة فيها:

$$\boxed{3}\quad \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)_{R'} = \dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{K'}$$

ويجب علينا الآن حساب مشتقات أشعة الواحدة $\vec{K'}, \vec{j'}, \vec{i'}$ بالنسبة للزمن في الجملة المطلقة R. كل واحد من هذه المشتقات هو شعاع

يمكننا صياغة في أي جملة نريد، لذلك سنفترض أن هذه المشتقات تصاغ في الجملة $\acute{R}$ على النحو التالي:

$$\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right)_R = x_1\vec{i'} + y_1\vec{j'} + z_1\vec{K'}$$

$$\left(\frac{d\vec{j'}}{dt}\right)_R = x_2\vec{i'} + y_2\vec{j'} + z_2\vec{K'}$$

$$\left(\frac{d\vec{K'}}{dt}\right)_R = x_3\vec{i'} + y_3\vec{j'} + z_3\vec{K'}$$

ولأن $\vec{i'}^2 = 1$ فإن $2\vec{i'}\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right)_R = 0$، ومنه نستنتج أن $x_1 = 0$،
وبالطريقة نفسها نبرهن أن $y_2 = 0$ و $z_3 = 0$ فنحصل على:

$$\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right)_R = y_1\vec{j'} + z_1\vec{K'}$$

$$\left(\frac{d\vec{j'}}{dt}\right)_R = x_2\vec{i'} + z_2\vec{K'}$$

$$\left(\frac{d\vec{K'}}{dt}\right)_R = x_3\vec{i'} + y_3\vec{j'}$$

ومن جهة أخرى لدينا $\vec{i'}\cdot\vec{j'} = 0$
نستنتج من ذلك أن $\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right)_R\vec{j'} + \vec{i'}\cdot\left(\frac{d\vec{j'}}{dt}\right)_R = 0$ ومن ثم $y_1 + x_2 = 0$
أي $x_2 = -y_1$ وبطريقة مماثلة نثبت أن $z_1 = -x_3$ ، $y_3 = -z_2$ فيكون

$$\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right)_R = y_1\vec{j'} - x_3\vec{K'}$$

$$\left(\frac{d\vec{j'}}{dt}\right)_R = -y_1\vec{i'} + z_2\vec{K'}$$

$$\left(\frac{d\vec{K'}}{dt}\right)_R = x_3\vec{i'} - z_2\vec{j'}$$

وأخيراً اذا فرضنا الشعاع

$$\vec{\Omega} = z_2 \vec{i'} + x_3 \vec{j'} + y_1 \vec{k'} \qquad \boxed{4}$$

فانه يمكن أن نكتب بسهولة

$$\left(\frac{\partial \vec{i'}}{\partial t}\right)_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{i'} \quad , \left(\frac{\partial \vec{j'}}{\partial t}\right)_R = \Omega \wedge \vec{j'} \quad , \left(\frac{\partial \vec{k'}}{\partial t}\right)_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{k'} \qquad \boxed{5}$$

نعوض في العلاقة 2 ما وجدنا في العلاقات 3 و 5 فنحصل على علاقة الإشتقاق الأساسية

ملاحظة : 1) اذا كان الشعاع $\vec{u}$ ثابتاً في الجملة R' تختصر العلاقة 1 إلى الشكل

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$$

2) اذا طبقنا العلاقة 1 على الشعاع $\vec{\Omega}$ نفسه فاننا نحصل على :

$$\left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}\right)_{R'}$$

فشعاع الدوران يتغير بالطريقة نفسها زمانياً في كلتا الجملتين R و R'

* علاقة تركيب السرعات :

نلاحظ أن شعاعي موضع M في الجملتين R و R' مرتبطان بالعلاقة التالية :

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن في الجملة R نجد :

$$\left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial \vec{OO'}}{\partial t}\right)_R + \left(\frac{\partial \vec{O'M}}{\partial t}\right)_R \qquad \boxed{1}$$

نعلم أن

$$\left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}\right)_R = v(M/R) = \vec{v_a}$$

كما أن

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{OO'}}{\partial t}\right)_R = v(O'/R)$$

أما الحد الثاني في العلاقة $\boxed{1}$ فيمكن حسابه بتطبيق علاقة الاشتقاق على الشعاع $\overrightarrow{O'M}$ فنحصل على:

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{O'M}}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial \overrightarrow{O'M}}{\partial t}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

في هذه العلاقة لدينا:

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{O'M}}{\partial t}\right)_{R'} = \vec{v}(M/R') = \vec{v_r}$$

ونحصل في الختام على علاقة تركيب السرعات وهي:

$$\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/R') + \left[\vec{v}(O'/R) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right] \qquad \boxed{2}$$

- نلاحظ دلالة الحد الأول مباشرة، فهو يمثل شعاع السرعة النسبية للنقطة المادية M بالنسبة للجملة المتحركة R'
- أما مجموع الحدين الأخيرين، فإنه يعبر عن سرعة نقطة وهمية P تدعى النقطة المنطبقة، وهي تلك النقطة من جسم الجملة المتحركة R' التي تنطبق على M في اللحظة t. فهذه النقطة المنطبقة مرتبطة ارتباطاً "صلباً" مع الجملة R' ولذا فهي تنجر مع هذه الجملة وسرعتها النسبية بالنسبة للجملة R' تساوي الصفر. أما سرعتها بالنسبة للجملة R فيمكن حسابها من العلاقة السابقة نفسها:

$$\vec{v}(P/R) = \vec{v_e} = \vec{v}(O'/R) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'P} \qquad \boxed{3}$$

- ندعو سرعة النقطة المنطبقة $\vec{v}(P/R)$ سرعة الجر ونرمز لها غالباً "$\vec{v_e}$"
ولتوضيح مفهوم النقطة المنطبقة سنناقش بعض الحالات الخاصة فيما بعد...

نكتب إذن علاقة تركيب السرعات كما يلي :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \qquad \boxed{4}$$

فالسرعة المطلقة لنقطة مادية تساوي سرعتها النسبية مضافاً إليها سرعة الجر .

✱ علاقة تركيب التسارع

- لنبحث الأن عن شعاع التسارع المطلق للنقطة المادية M :

$$\vec{\gamma}_a = \left(\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t}\right)_R$$

$$\vec{\gamma}_a = \left(\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t}\right)_R + \left(\frac{\partial \vec{v}(O'/R)}{\partial t}\right)_R + \left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}\right)_R \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{\partial \vec{O'M}}{\partial t}\right)_R$$

وفي هذه العلاقة نلاحظ مايلي :

$$\left(\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

$$= \vec{\gamma}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

$$\left(\frac{\partial \vec{v}(O'/R)}{\partial t}\right)_R = \vec{\gamma}(O'/R)$$

$$\vec{\Omega} \wedge \left(\frac{\partial \vec{O'M}}{\partial t}\right)_R = \vec{\Omega} \wedge \left[\left(\frac{\partial \vec{O'M}}{\partial t}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}\right]$$

$$= \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M})$$

لذا يكتب شعاع التسارع المطلق بالشكل :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \left[\vec{\gamma}(O'/R) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \vec{O'M}\right] + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

نميز في هذه العلاقة الحدود الثلاثة الآتية

- شعاع التسارع النسبي $\vec{\gamma}_r$: يمثل الحد الأول مشتق شعاع السرعة النسبية بالنسبة للزمن في الجملة R' ومن ثم فهو يعبر عن شعاع التسارع النسبي للنقطة المادية بالنسبة للجملة R' أي:

$$\vec{\gamma}_r = \gamma(M/R') = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{R'} \qquad \boxed{5}$$

- شعاع تسارع الجر $\vec{\gamma}_e$: يمثل مجموع الحدود الثلاثة التالية شعاع تسارع النقطة المنطبقة ولذلك ندعو هذا الشعاع شعاع تسارع الجر:

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O'/R) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \vec{O'M} \qquad \boxed{6}$$

$= \vec{\gamma}(P/R')$ تسارع النقطة المنطبقة

ويجب أن نؤكد هنا أن العلاقة بين شعاعي تسارع وسرعة الجر ليست بسيطة أبداً، فشعاع تسارع الجر لا يساوي أبداً مشتق شعاع سرعة الجر بالنسبة للزمن (إلا في الحالات الخاصة التي تتحرك فيها R' حركة انسحابية بالنسبة لـ R):

$$\gamma_e \neq \left(\frac{d\vec{v}_e}{dt}\right)_R$$

- شعاع تسارع كوريوليس $\vec{\gamma}_c$: يمثل الحد الأخير شعاع تسارع إضافي ناجم عن دوران الجملة R' بالنسبة للجملة R وعن حركة النقطة المادية في R' يدعى تسارع كوريوليس نسبة إلى فيزيائي فرنسي Coriolis و يعطى هذا الشعاع بالعلاقة التالية:

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \qquad \boxed{7}$$

- ينعدم هذا التسارع في الحالات الثلاث الآتية:

1- عندما يكون شعاع الدوران صفر $\vec{\Omega}=0$، أي عندما تكون حركة R' انسحابية بالنسبة لـ R

2- عندما تكون النقطة M ساكنة بالنسبة للجملة R'، أي عندما $\vec{v}_r = \vec{0}$

3- إذا كان مسار M، بالنسبة لـ R' موازياً $\vec{\Omega}$ أي عندما $\vec{\Omega} \parallel \vec{v}_r$

- نكتب إذن علاقة تركيب التسارعات بالشكل الآتي:

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \qquad \boxed{8}$$

فشعاع التسارع المطلق يساوي مجموع شعاع التسارع النسبي وشعاع تسارع الجر و شعاع تسارع كوريوليس.

☆ حالات خاصة:

1- حركة R' انسحابية بالنسبة لـ R:

نقول عن حركة الجملة R' إنها انسحابية بالنسبة للجملة R إذا وفقط إذا ظل الشعاع $\vec{AB}$ الواصل بين أي نقطتين مختلفتين (A, B) ثابتين في R' ثابتاً بمرور الزمن في R: أي يحافظ هذا الشعاع على اتجاه واحد ومن ثم يظل موازياً في كلتا الجملتين لمنحى ثابت ويبقى طوله ثابتاً بمرور الزمن، وهذا الشرط يكافئ العلاقة:

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{AB}}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial \overrightarrow{AB}}{\partial t}\right)_{R'} = 0$$

وفي هذه الحالة يتطابق شعاع الدوران مع الصفر $\vec{\Omega} = 0$ وفي هذه الحالة نستنتج

$$\vec{v}_e = \vec{v}(O'/R) = \frac{\partial \overrightarrow{OO'}}{\partial t}$$

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O'/R) = \frac{\partial^2 \overrightarrow{OO'}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\gamma}_c = 0$$

ومن ثم:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}(O'/R)$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}(O'/R)$$

ملاحظة: في حالة الحركة الانسحابية تظل أشعة الواحدة في R' ثابتة بالنسبة للجملة R ويتحقق ذلك عندما تكون الأشعة الواحدية لـ R' موازية لمقابلاتها من R (أو تصنع معها زوايا ثابتة) ومن ثم يمكن أن تكون الحركة على شكل انسحاب دائري أو اهليلجي أو منحن وفي جميع هذه الانسحابات يكون $\vec{\Omega} = 0$

2 ـ حركة R' دورانية بالنسبة لـ R:

تتحرك الجملة R' حركة دورانية بالنسبة للجملة R بحيث يظل مستوياهما oxy و $o'x'y'$ منطبقين. أي إن R' تدور بالنسبة لـ R حول محور مشترك هو oz بسرعة زاوية $\omega(t)$ (متغيرة بمرور الزمن في الحالة العامة) يمكننا ايجاد سرعة وتسارع الجر في هذه الحالة بنقاش بسيط لحركة النقطة المنطبقة أو بتطبيق العلاقتين 3 ، 6

أما الحساب المباشر فيقودنا إلى الصيغة التالية لشعاع سرعة الجر:

$$\vec{v_e} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

وبتطبيق العلاقة نجد شعاع تسارع الجر وهو

$$\vec{\gamma_e} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \vec{OM}$$

وشعاع كوريوليس هو:

$$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v_r}$$

- أما عن طريق مفهوم النقطة المنطبقة، وبفرض H مسقط النقطة المادية M على OZ، فنلاحظ أنه إذا كانت P نقطة من R' منطبقة على M في اللحظة t، فإن هذه النقطة، التي تنجر مع حركة R' سترسم دائرة في مستو عمودي على محور الدوران OZ، نصف قطرها HM وذلك بالسرعة الزاوية $\omega(t)$ السابقة نفسها. فتكون سرعة الجر عمودية على $\vec{HM}$ باتجاه الدوران، وقيمتها تساوي ωHM. أما تسارع الجر فيساوي تسارع النقطة المنطبقة ولهذا السبب له مركبتان إحداهما مماسية لهذا المسار الدائري الوهمي وقيمتها تساوي $HM\, \partial\omega/\partial t$ والأخرى ناظمية موجهة نحو H وقيمتها تساوي v_e^2/HM.

- من جهة أخرى إذا كان الدوران منتظماً (أي $\partial\vec{\Omega}/\partial t = 0$) وبفرض $\theta = (\vec{i}, \vec{i'})$ الزاوية بين Ox و Ox' نلاحظ أن:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma_e} &= \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \\ &= \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (\vec{OH} + \vec{HM})] \\ &= (\vec{\Omega} \cdot \vec{HM})\,\Omega - \Omega^2 \vec{HM}\end{aligned}$$

اعتماداً على العلاقة:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

- فإذا كان الدوران منتظماً أصبحت عبارة شعاع تسارع الجر بالشكل التالي:

$$\vec{\gamma}_e = -\omega^2 \vec{HM}$$

في حالة: حركة R' دورانية منتظمة بالنسبة لـ R

- ففي هذه الحالة تصبح المركبة المماسية لتسارع النقطة المنطبقة صفراً حيث ترسم النقطة المنطبقة المسار الدائري بسرعة زاوية منتظمة.