كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة: التاسعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية

يحتوي الحل العام للمعادلة التفاضلية عادةً على عدد من الثوابت يساوي رتبة المعادلة التفاضلية و هذا يعني أن لكل معادلة تفاضلية عدد كبير من الحلول و ذلك تبعاً لقم تلك الثوابت.

و لتعيين حل وحيد يجب أن نعرف شروطاً ابتدائية أو حدية يجب أن يحققها الحل، و يشترط لذلك أن تكون المعادلة التفاضلية قابلة للحل.

سنكتفي هذا الفصل بإيجاد الحل التقريبي لمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى و التي تعطى بالصيغة $y' = f(x,y)$ مع الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ حيث يعطى المجال $[a,b]$ الذي يحوي حل هذه المعادلة.

لنتعرف على طرائق إيجاد الحل التقريبي لمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى :

طريقة منشور تايلور:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ مع الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ و بفرض أن الحل $y = f(x)$ محتوى في المجال $[a,b]$.

ننشر الحل $y = f(x)$ في جوار النقطة x_0 وفق منشور تايلور:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + y''_0 \frac{(x-x_0)^2}{2!} + y'''_0 \frac{(x-x_0)^3}{3!} + \cdots$$

نقسم المجال $[a,b]$ إلى n جزء متساوٍ في الطول، طول كل منها $h = \frac{b-a}{n}$ بواسطة النقاط:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

حيث: $x_{i+1} - x_i = h$ فنحصل على المجالات:

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ و لنعتبر أن النشر يتم في المجال الأول:

في حال $x = x_1$ نجد:

$$y_1 = y_0 + y'_0(x_1 - x_0) + y''_0 \frac{(x_1-x_0)^2}{2!} + y'''_0 \frac{(x_1-x_0)^3}{3!} + \cdots$$
$$= y_0 + y'_0 h + y''_0 \frac{h^2}{2!} + y'''_0 \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

عنما ننشر حول x_1 وفق تايلور تصبح العلاقة بالشكل:

$$y = y_1 + y'_1(x - x_1) + y''_1 \frac{(x - x_1)^2}{2!} + y'''_1 \frac{(x - x_1)^3}{3!} + \cdots$$

في حال $x = x_2$ نجد:

$$y_1 = y_1 + {y'}_1(x_2 - x_1) + {y''}_1\frac{(x_2 - x_1)^2}{2!} + {y'''}_1\frac{(x_2 - x_1)^3}{3!} + \cdots$$
$$= y_1 + {y'}_1 h + {y''}_1\frac{h^2}{2!} + {y'''}_1\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

و هكذا نحصل على الدستور التدريجي:

$$y_n = y_{n-1} + {y'}_{n-1}h + {y''}_{n-1}\frac{h^2}{2!} + {y'''}_{n-1}\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

مثال: أوجد باستخدام أربعة حدود من منشور تايلور الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية :

$xy' = x - y\,, h = 0.2$ مع الشرط الابتدائي $y_0(2) = 2$

أوجد y_2 فقط.

الحل:

$$xy' = x - y \Rightarrow y' = 1 - \frac{y}{x} = f(x, y)$$

و منه: $y'' = -\frac{y'x - y}{x^2} = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2}$

$$y''' = -\frac{y''x - y'}{x^2} + \frac{y'x - y}{x^2} = -\frac{y''}{x} + 2\frac{y'}{x^2} - 2\frac{y}{x^3}$$

$$y'_0(x_0, y_0) = 1 - \frac{2}{2} = 0$$

$$y_0'' = -\frac{y_0'}{x_0} + \frac{y_0}{x_0} = 0 + \frac{2}{4} = 0.5$$

$$y_0''' = -\frac{y_0''}{x_0} + 2\frac{y_0'}{{x_0}^2} - 2\frac{y_0}{{x_0}^3} = -\frac{0.5}{2} + 2\frac{0}{4} - 2\frac{2}{8} = -0.75$$

الدستور التدريجي: $y_n = y_{n-1} + {y'}_{n-1}h + {y''}_{n-1}\frac{h^2}{2!} + {y'''}_{n-1}\frac{h^3}{3!} + \cdots$

$$y_1 = y_0 + {y'}_0 h + {y''}_0\frac{h^2}{2!} + {y'''}_0\frac{h^3}{3!}$$

$$y_1 = 2 + 0(0.2) + (0.5)\frac{(0.2)^2}{2!} + (-0.75)\frac{(0.2)^3}{3!} = 2.009$$

$$y_1' = f(x_1, y_1) = 1 - \frac{y_1}{x_1} = 1 - \frac{2.009}{2.2} = 0.08681$$

$$y_1'' = -\frac{y_1'}{x_1} + \frac{y_1}{x_1} = -\frac{0.08681}{2.2} + \frac{2.009}{(2.2)^2} = 0.37562$$

$$y_1''' = -\frac{y_1''}{x_1} + 2\frac{y_1'}{{x_1}^2} - 2\frac{y_1}{{x_1}^3} = -\frac{0.37562}{2.2} + 2\frac{0.08681}{(2.2)^2} - 2\frac{2.009}{(2.2)^3}$$
$$= -0.51221$$

و منه: $y_2 = y_1 + {y'}_1 h + {y''}_1\frac{h^2}{2!} + {y'''}_1\frac{h^3}{3!}$

$$y_2 = 2.009 + (0.2)(0.08681) + (0.37562)\frac{(0.2)^2}{2!} + (-0.51221)\frac{(0.2)^3}{3!}$$
$$y_2 = -2.03319$$

طريقة أولر:

نعلم ان نشر تايلور للتابع $y = f(x)$ يعطى بالعلاقة:

$$y(x_{n+1}) = y_{n+1} = y(x_n + h) = y_n + y'_n h + y''_n \frac{h^2}{2!} + y'''_n \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

فإذا اكتفينا بأول حدين من منشور تايلور نجد:

$$y_{n+1} = y(x_n + h) = y_n + hy'_n = y(x_n) + h.f(x_n, y_n)$$ أي:

$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n)$ و هذه العلاقة تسمى طريقة تايلور من المرتبة الأولى أو طريقة أولر

مثال:

أوجد الحل y_3 للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + x^2y^2$ مع الشرط الابتدائي $y(0.1) = 1$ و حيث $h = 0.1$

الحل: نعزل y' فنجد: $y' = x + xy^2 = f(x, y)$ و منه:

نحسب: $y_1 = y_0 + h.f(x_0, y_0)$

$$f(x_0, y_0) = 0.1 + (0.1)(1)^2 = 0.2$$
$$y_1 = y_0 + h.f(x_0, y_0) = 1 + (0.1)(0.2) = 1.02$$
$$x_1 = x_0 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

نحسب: $y_2 = y_1 + h.f(x_1, y_1)$

$$f(x_1, y_1) = 0.2 + (0.2)(1.02)^2 = 0.40808$$
$$y_2 = y_1 + h.f(x_1, y_1) = 1.02 + (0.1)(0.40808) = 1.060808$$
$$x_2 = x_1 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

نحسب: $y_3 = y_2 + h.f(x_2, y_2)$

$$f(x_2, y_2) = 0.3 + (0.3)(1.060808)^2 = 0.63759$$

$$y_3 = y_2 + h.f(x_2, y_2) = 1.060808 + (0.1)(0.63759) = 1.124567$$

طريقة أولر المعدلة:

في هذه الطريقة استخدم أولر الحدود الثلاثة الأولى من منشور تايلور لحل المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ مع الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ حيث ينتمي الحل للمجال $[a, b]$ الذي نقسمه إلى n جزء متساوٍ في الطول، طول كل منها $h = \frac{b-a}{n}$ بواسطة النقاط:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

حيث: $x_{i+1} - x_i = h$

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + y''_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!}$$

في حال $x = x_1$ نجد:

$$y_1 = y_0 + y'_0(x_1 - x_0) + y''_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}$$

$$y_1 = y_0 + y'_0 h + y''_0 \frac{h^2}{2!}$$

$$y'_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$y''_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'_0}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{y'_1 - y'_0}{h}$$

و بفرض أن: $y''_0 \approx \frac{y'_1 - y'_0}{h}$ نجد أن: $y_1 = y_0 + y'_0 h + \left(\frac{y'_1 - y'_0}{h}\right)\frac{h^2}{2!}$

$$y_1 = y_0 + y'_0 h + \frac{h}{2}y'_1 - \frac{h}{2}y'_0 = y_0 + \frac{h}{2}y'_0 + \frac{h}{2}y'_1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(y'_0 + \overline{y'_1}\right)$$

حيث: $\overline{y'_1} = f(x_1, \overline{y_1})$ و $\overline{y_1} = y_0 + h.f(x_0, y_0)$

فإذا نشرنا حول x_{n-1} و بدلنا x_n عوضاً عن كل x و y_n عوضاً عن كل y فإننا نحصل على الدستور التدريجي لطريقة أولر المعدلة: $y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}\left(y'_{n-1} + \overline{y'_n}\right)$

مثال: أوجد بطريقة أولر المعدلة الحل y_2 للمعادلة التفاضلية $xy' = x - y$ حيث الشرط الابتدائي $y(2) = 2$ و $h = 0.02$

الحل:

نعزل y' نجد أن: $y' = 1 - \frac{y}{x} = f(x, y)$ $x_1 = x_0 + h = 2 + 0.02 = 2.02$

لدينا $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(y'_0 + \overline{y'_1}\right)$ حيث $\overline{y'_1} = f(x_1, \overline{y_1})$

$$\overline{y_1} = y_0 + h.f(x_0, y_0) = 2 + (0.02)\left(1 - \frac{2}{2}\right) = 2$$

$$\overline{y'_1} = f(x_1, \overline{y_1}) = 1 - \frac{2}{2.02} = 0.0099$$

$$y_1 = 2 + \frac{0.02}{2}(0 + 0.099) = 2.000099$$

$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(y'_1 + \overline{y'_2}\right)$ ،

$$x_2 = x_1 + h = 2.02 + 0.02 = 2.04$$

$$\overline{y_2} = y_1 + h.f(x_1, y_1) = 2.000099 + (0.02)\left(1 - \frac{2.000099}{2.02}\right)$$
$$= 2.000099 + (0.02)(0.009851) = 2.00029$$

$$y'_2 = f(x_2, \overline{y_2}) = 1 - \frac{2.00029}{2.04} = 0.01946$$

و بالتالي: $y_2 = 2.000099 + \frac{0.02}{2}(0.009851 + 0.01946) = 2.000392$

تمارين عملي:

1. أوجد باستخدام خمسة حدود من منشور تايلور الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية :
$y' = x.y \, , h = 0.1$ مع الشرط الابتدائي $y_0(0) = 1$
2. اوجد الحل y_5 للمعادلة التفاضلية $y' = y - 2\frac{x}{y}$ بطريقة أولر حيث الشرط الابتدائي
$y_0(0) = 1$ و $h = 0.2$
3. اوجد الحل y_5 للمعادلة التفاضلية $y' = 2xy$ بطريقة أولر المعدلة حيث الشرط الابتدائي
$y_0(0) = 1$ و $h = 0.1$