كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : العاشرة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مقدمة:

بوضع خواص متسلسلات القوى:

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ متقاربة ونصف قطرها r من دالة $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ عندئذٍ ما يلي:

1) $f(x)$ مستمرة على مجال التقارب $]-r,r[$

2) الدالة $f(x)$ قابلة للمكاملة على المجال $[0,x]\subset]-r,r[$

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

3) أيضاً الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]-r,r[$

ويكون $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$

4) للحصول على معاملات متسلسلة القوى نلاحظ أنه

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots \quad (*)$$

$$f'(x)=a_1+2(x-x_0)a_2+3a_3(x-x_0)^2+\dots$$

$$f''(x)=2a_2+2a_3(x-x_0)+\dots$$

نأخذ $x=x_0$ نجد

$$f(x_0)=a_0,\ f'(x_0)=a_1,\ f''(x_0)=2a_2,\ f'''(x_0)=6a_3$$

$$\Rightarrow a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!},\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

نستنتج أنّ: $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad ; \quad |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

ونسمّيها سلسلة تايلور حولَ x_0

تمرين: أوجد منشور الدالة الأسية للدالة e^x حولَ الصفر.

$$f(x)=e^x$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad ; \quad f^n(0)=e^0=1$$

وهو منشور تايلور حولَ الصفر.

تمرين: أوجد مجال، نصف قطر التقارب ومجموع كلٍّ من المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot x^{n-1}$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}$$

نعلم أنّ $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ متقاربة بشرط $|x|<1$

$x\in]-1,1[$ أي $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$: $f(x)$ مجموع عناصر متقاربة ومجموع دالة مستمرّة على المجال $]-1,1[$ فهي قابلة للاشتقاق

ويكون $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n+n)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{(n-1)} = \sum (n^2-n+n)x^{n-1} = \sum (n^2-n)x^{n-1} + \sum n.x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1).x^{n-2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = x f''(x) + f'(x) = x.\frac{-2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x+1-x}{(1-x)^3} = \frac{x+1}{(1-x)^2}$$

تمرين: أوجد مجال ونصف قطر تقارب المتسلسلة ومجموع المتسلسلة ومجال التقارب

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . n . 2^n . x^{n-1}$$

الحل

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{2^n} = 1 \times 2 = 2$$

$$d = 2 \Rightarrow r = \frac{1}{d} = \frac{1}{2}$$

مجال التقارب $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

عندما $x = -\frac{1}{2}$ ⇐

$$\sum (-1)^n . n . 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum (-1)^n . n . \frac{2^n . (-1)^{n+1}}{2^{n-1}} = \sum (-1)^{2n-1}$$

⇐ المتسلسلة متباعدة ⇐ $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ هو مجال التقارب

نكامل المتسلسلة حداً حداً على $[0, x]$ نحصل على

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^n . n . 2^n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . 2^n . x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . (2x)^n = -2x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . (2x)^n = -2x \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= -2x \cdot \frac{1}{1-(-2x)} = \left(\frac{-2x}{1+2x}\right)' = f(x)$

نشتق $f(x)$ نحصل على مجموع المتسلسلة

$$\frac{-2(1+2x)-2(-2x)}{(1+2x)^2} = \frac{-2}{(1+2x)^2}$$

تمرين: أوجد متسلسلة تايلور للدوال الآتية:

① $f(x)=\sin x$، ② $f(x)=\cos x$، ③ $f(x)=\frac{1}{1-x}$، ④ $f(x)=\frac{1}{1+x}$

⑤ $f(x)=\ln(1+x)$، ⑥ $f(x)=\frac{1}{1+t^2}$، ⑦ $f(x)=\arctan(x)$

⑧ $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

من التابع 4 بالمكاملة نحصل على التابع 5 وبتعويض t^2 بالمنكور 4 نحصل على المنكور السادس وبمكاملة السادس نحصل على arctan

① $f(x)=\sin x \Rightarrow$ حولـ ن

$$f(x)=\sin x = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f''''(0)}{4!}x^4+\cdots$$

$f(0)=\sin(0)=0$

$f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(0)=\cos(0)=1$

$f''(x)=-\sin x \Rightarrow f''(0)=0$، $f'''(x)=-\cos x \Rightarrow f'''(0)=1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f''''(x) = \sin x \Rightarrow f''''(0) = -1$

$f(x) = \sin x = 0 + x + 0 - \frac{1}{6}x^3 + 0 + \dots$

$= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

② $f(x) = \cos x$

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + \dots$$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0$

$f''''(x) = \cos x \Rightarrow f''''(0) = 1$

$$f(x) = 1 - \frac{1 \cdot x^2}{2!} + 0 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

بمتابعة التوابع نعطي الاجوبة والطريقة تتبع التسلسل.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \; ; \; f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n} \; , \; f(x) = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f(x)=\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ضمنه الشرط $|x|<1$

تمرين: اوجد منشور الدالة $f(x)=\frac{e^x}{1-x}$

بد منشور $f(x)$ من متسلسلة القوى حول 0.

$$=e^x\cdot\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot x^n=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$$

تمرين $f(x)=\frac{5}{x^4-13x^2+36}$

بد منشور $f(x)$ في متسلسلة القوى حول 0

$$=\frac{5}{(x^2-9)(x^2-4)}=\frac{A}{x^2-9}+\frac{B}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-4}$$

$$=-\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{4-x^2}=-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)$$

$-2<x<2$ ، $-3<x<3$

$\left|\frac{x}{2}\right|<1$ و $\left|\frac{x}{3}\right|<1 \Rightarrow x\in]-2,2[$

هو مجال تقارب المتسلسلة.

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^n$$

$$=-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{9^n}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9^n}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^n}\right)x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{9^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)x^{2n}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: $f(x)=\frac{1-x}{(1+x)^3}$ اوجد منشور $f(x)$ في متسلسلة

التوعي حول الصفر مبيناً المجال الذي يمكن نشره فيه.

ملاحظة: التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ أكبر مجال مركزه صفر يمكن نشر التابع عليه هو المجال المفتوح $]-1,1[$

$$f(x)=\frac{1-x}{(1+x)^3}=\frac{x-1}{(1+x)^3}=\frac{-(x+1-2)}{(1+x)^3}=-\frac{(x+1)}{(1+x)^3}+\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1+x)^3}$$

لكل منشور:

$$\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.n.x^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1+x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}\Rightarrow$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.n.x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.n.(n-1).x^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.(n+1).x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.(n+2).(n+1).x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2.x^n$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة