كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

درسنا بشكل عام سابقاً سلاسل الدوال من حيث التقارب النقطي والمنتظم والاستمرار والتكامل والاشتقاق وبشكل خاص لدينا متسلسلات تدعى متسلسلات القوى وهي من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x-x_0)^n$ أو من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تدعى a_n معاملات متسلسلات القوى.

مبرهنة آبل:

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة من أجل $x=x_0$ فهي متقاربة من أجل قيم x التي تحقق $|x|<|x_0|$ أما إذا كانت المتسلسلة متباعدة من أجل $x=x_0$ فهي متباعدة من أجل $|x|>|x_0|$

البرهان:

لنأخذ المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ولتكن متقاربة $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ وهو شرط لازم وغير كافي

$\Leftarrow$

$|a_n x_0^n| \le M$ (محدودة) أياً كان n عدداً طبيعياً

ولدينا $|x|<|x_0| \Rightarrow q = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$ وبالتالي

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| < M \cdot q^n$$

وبما أنّ المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ متقاربة
فإنّ المتسلسلة $\sum a_n x^n$ تكون متقاربة مطلقاً فرضاً
متقاربة أما إذا كانت المتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
متباعدة وكانت $|x| > |x_0|$ فإذا كانت $\sum a_n x^n$ متقاربة
تكون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة وهذا تناقض.

مبرهنة 2:

لكل متسلسلة قوى يوجد عدد موجب r بحيث تكون
متسلسلة القوى متقاربة مطلقاً من أجل $|x| < r$ ومتباعدة
من أجل $|x| > r$ بشكل خاص إذا كان $r = 0$ فإنّ
المتسلسلة تتباعد من أجل جميع قيم x المغايرة للصفر
أما إذا كانت $r = \infty$ فالمتسلسلة متقاربة دوماً أياً
كانت x نسمي R نصف قطر التقارب عند الأطراف
من أجل r و $-r$ ونغلق المجال إذا كان هناك تقارب
عندهما

مبرهنة 3: إذا كانت $r > 0$ نصف قطر التقارب
لـ $\sum a_n x^n$ فإنها تتقارب طبيعياً وبالتالي
تتقارب بانتظام على كل مجال جزئي من مجال التقارب

كيف يمكن إيجاد نصف قطر التقارب r:

لتحديد نصف قطر التقارب نستخدم اختبار دالمبير أو
اختبار كوشي فإذا كانت $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = d$
عندئذٍ النظرية التالية تكون

موجبة

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right| = |dx|$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبالتالي تتقارب المتسلسلة مطلقاً من أجل جميع قيم $|dx|<1$ وهذا يعني أن $|x|<\frac{1}{d}$ فيكون $r=\frac{1}{d}$ وهو نصف قطر التقارب وتتباعد إذا كانت $|x|>\frac{1}{d}$ ونلاحظ عندما $d=\infty$ يكون $r=0$ والمتسلسلة متقاربة فقط عندما $x=0$ أما إذا كانت $d=0$ تكون $r=+\infty$ وبالتالي تكون المتسلسلة متقاربة أياً كانت x من R $\forall x\in R$ وهذه المناقشة تنطبق على كوشي

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = d$$

نفس الكلام يعني أن كوشي والمبير يعطيا قيمة d.

تمرين: أوجد مجال ونصف قطر التقارب للمتسلسلتين

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 = d \Rightarrow r=\frac{1}{d}=1$

يكون مجال التقارب $]-1,1[$ ونبحث التقارب عند أطراف المجال

عندما $x=1$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)^n}{\sqrt{n}}$ متباعدة

عندما $x=-1$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ وهي متقاربة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} = \frac{1}{2}$ حسب كوشي

$d = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{d} = 2$

وهو نصف قطر التقارب ومجال التقارب $]-2,2[$

من أجل $x=2$ يصبح على

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

متقاربة حسب ليبنز

من أجل $x=2 \Leftarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

متباعدة $\Leftarrow$ مجال التقارب هو

$[-2,2[$.

ملاحظة:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ نفرض $y = x - x_0$ نطبق على المتسلسلة

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ فيكون مجال التقارب للمتسلسلة الأخيرة

$y \in]-r,r[$

إذا كانت $y=r \Leftarrow x-x_0=r$ و $x=x_0+r$

$y=-r$

$x-x_0=r$

$x=x_0+r \Leftarrow$ مجال التقارب هو $x \in]x_0-r, x_0+r[$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: جد مجال ونصف قطر التقارب للمتسلسلات الآتية:

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ ، ② $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$ ، ③ $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-5)^n$

الحل:

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$

$y = x-2$ ←

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 \right| = 1 = d \Rightarrow r = 1$

مجال التقارب $]-1,1[$

عندما $y = 1$ نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

وهي متسلسلة متقاربة.

عندما $y = -1$ ← $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ مرين متقاربة.

مجال التقارب هو $[-1,1]$ نعوضها بالـ x ←

$x-2 = -1 \Rightarrow x = 1$ و $x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$

← مجال التقارب هو $[1,3]$

② $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$

نفرض $y = x-1$ ←

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = d.$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$ ← المتسلسلة متقاربة أيا كانت x من R.

③ $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-5)^n$

نفرض $y = x-5$ ←

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, y^n$ ← $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty = d$

$r = \frac{1}{d} = 0$

فالمتسلسلة متقاربة من أجل $y = 0$

فوائد:

العمليات على متسلسلات القوى

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة على مجال $]-r', r'[$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ متقاربة على مجال $]-r'', r''[$ ←

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ ← $]-rr', rr'[$

← يكون مجموع المتسلسلتين هو نصف قطر التقارب.

$r' = \inf(r', r'')$

② $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$= a_0 + b_n x^n + a_1 b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_n b_0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n+} \cdots + a_n b_0) x^n$$

ويكون نصف قطر التقارب $r \geq inf$

المشتقة

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

والمتسلسلة الناتجة عند التكامل حداً حداً نحصل على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1}$ ولها نصف القطر ذاته

مع المتسلسلة الأولى.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة