كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا عامة١

المحاضرة : **العاشرة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمرين 1: لتكن لدينا المجموعة

$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; (x+1)^2+(y-2)^2=4\}$.

أثبت أن الفضاء (X,d) الجزئي من الفضاء $(\mathbb{R}^2,d)$ تام.

الحل:

لإثبات أن الفضاء الجزئي (X,d) تام يكفي أن نثبت أن X مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R}^2,d)$ من أجل ذلك يكفي أن نثبت أن $\mathbb{R}^2/X$ مجموعة مفتوحة

$$\mathbb{R}^2/X=\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; (x+1)^2+(y-2)^2>4\}}_{A}\cup\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; (x+1)^2+(y-2)^2<4\}}_{B}$$

$\mathbb{R}^2/X=A\cup B$

B عبارة عن كرة مفتوحة مركزها $(-1,2)$ ونصف قطرها 2 فهي مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}^2,d)$ ((لأن كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة في أي فضاء متري))

لدينا

$\mathbb{R}^2/A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; (x+1)^2+(y-2)^2<4\}$

عبارة عن كرة مغلقة مركزها $(-1,2)$ ونصف قطرها 2 فهي عبارة عن مجموعة مغلقة أي $\mathbb{R}^2/A$ مجموعة مغلقة $\Leftarrow$ A مجموعة مفتوحة.

وهنا R^2/X عبارة عن اجتماع لمجموعتين مفتوحتين

$\Leftarrow$ R^2/X مجموعة مفتوحة بالتالي X مجموعة مغلقة في (R^2,d)

وهنا (X,d) فضاء جزئي تام من الفضاء (R^2,d).

تمرين 2:

ليكن لدينا التوبولوجيا المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية

$$T=\{T\in P(\mathbb{R}) ;]-1,3[\subseteq T\}\cup\{\varphi\}$$

لتكن $A=]-2,4[$

1) أوجد عائلة جميع المجموعات المغلقة في (R,T)

2) جد $Is(A)$ ، A° ، $\bar{A}$ ، $ext A$ ، $bd A$ ، A' ، IsA

3) $\forall A$ مجموعة C بحيث تكون $B=]3,7[$ كثيفة في C.

الحل:

1) $F=\{f\in P(R);]-1,3[\not\subseteq F\}\cup\{R\}$

2) A°: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A

$A^\circ=A$

$\bar{A}$: أصغر مجموعة مغلقة تحوي A $\Leftarrow$

$\bar{A}=R$

$ext A=(R\setminus A)^\circ=\varphi$

$bd A=\bar{A}/A^\circ=R\setminus A$

$\bar{A}=A'\cup A$

$R=A'\cup]-2,4[$

$R\setminus A\subseteq A'$

نأخذ من نقاط A فقط

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x \in A' \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x) ; V \cap A \neq \varphi , \{x\}$

$\forall x \in A' \Leftrightarrow \Rightarrow \mathcal{V}(x) = \{ V \in P(R) ;]-1,3[\cup \{x\} \subset V \}$

$\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow]-1,3[\cup \{x\} \subset A \cap V$

$\Rightarrow A \cap V \neq \varphi , \{2\}$

$x \in A' \; \& \; x \notin Is A$

$A' = R , \; Is A = \varphi$

③. تكون B كثيفة في C $\Leftrightarrow \overline{B} = B$

$\Leftarrow$ أي مجموعة جزئية من B تحقق المطلوب

$C =]3,5[, C =]4,6[$.

التمرين الثالث: ليكن لدينا الفضاء المتري العادي $(R,|.|)$

① ليكن لدينا الفضاء الجزئي $A =]2,5[\cup ([-2,4],|.|)$

جد $A_{]-2,4[}$ و $A'_{]-2,4[}$

② جد جوار للمجموعة $B =]2,3[$

③. جد مجاورة للمجموعة $C =]-2,1[\cup]3,7[$

④. جد مثال لمجموعة مغلقة وليست كرة مغلقة في $(R,|.|)$

⑤. اعط مثال لمجموعة ليست مغلقة أو مفتوحة في $(R,|.|)$.

الحل:

① $\overline{A}_{]-2,4[} = \overline{A}_E \cap X = [2,5] \cap X = [2,4]$

$A'_X = A'_R \cap X$

$A'_E = A'_E \cup A \Rightarrow [2,5] = A'_E \cup]2,5[= \{2,5\} \subset A'_E$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتاقشي نقاط A

$\forall x \in A' \Leftrightarrow \forall V \in V(x) : V \cap A \neq \varphi \setminus \{x\}$

في الفضاء المتري لدينا كرة مفتوحة مركزها x مجاورة لـ x

$N(x,\rho) =]x-\rho, x+\rho[$

ρ كمفتوحة

$\rho > 1$

تقاطع مجالين مفتوحين هو مجال مفتوح بالتالي

$]x-\rho, x+\rho[$ مجموعة غير منتهية.

(2) $V(B) =]-2,4[$,

$V(B) =]-3,5[$

(3) c اجتماع لكرات مفتوحة فرين مجموعة مفتوحة

جيه مجاورة لنقط.

(4) $D = [-2,1] \cup [4,7]$

(5) $E =]-2,4]$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z