كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا١

المحاضرة : التاسعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

السؤال الأول: إذا كان $(E,d)$ فضاءاً متريّاً تاماً وكان $(X,d)$ فضاءاً جزئياً منه حيث $(X,d)$ فضاء تام فتحقق من كون المجموعة $X$ كثيفة في كل مكان في $(E,d)$ أم لا.

الجواب

$(E,d)$ فضاء تام و $(X,d)$ فضاء جزئي من $(E,d)$ وتام وعنى $X$ مجموعة مغلقة في $(E,d)$ وحسب المبرهنة: إذا كان $(E,d)$ فضاءاً متريّاً تاماً وكان $(X,d)$ فضاءاً متريّاً جزئياً منه بـ $(X,d)$ تام إذا وفقط إذا كانت $X$ مجموعة مغلقة في $(E,d)$

$$\overline{X}_E = X$$

لدينا حالتين:

① إذا كان $X \subset E$ و $\overline{X}_E \neq E \Leftarrow X \neq E$

$\Leftarrow$ $X$ ليست كثيفة في كلّ مكان في $(E,d)$

②

$$\overline{X}_E = E \Leftarrow X = E$$

$\Leftarrow$ $X$ كثيفة في كل مكان في $(E,d)$



مكتبة A to Z - كلية العلوم ( جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

السؤال الثاني: إذا كان $(E,d)$ فضاءاً متريّاً وكان $X \subset E$ مجموعة كيفية في كل مكان في $(E,d)$ تحقق أنّ الفضاء $(X,d)$ فضاء تام أم لا.

الحلّ:

① $X \subset E \Rightarrow \boxed{X+E}$

$X$ كيفية في كل مكان على $(E,d)$

② $\boxed{X-E}$

من ① و ② $\overline{X}_E + X$

$\Rightarrow X$ ليست مغلقة في $(X,d)$ غير تام.

السؤال الثالث:

لنأخذ الفضاء المتري $(R,|.|)$ الفضاءات الجزئية الآتية:

① $([0,1[, |.|)$

② $([5,7], |.|)$

③ $(]\frac{1}{3},5], |.|)$

④ $(\{1,2,3,\dots,n\}, |.|)$

تحقق أيّ الفضاءات الجزئية تام أم لا.

الحلّ:

① $\overline{[0,1[}_R = [0,1] + [0,1[$

$\Rightarrow [0,1[$ ليست مغلقة في $(R,|.|)$ ومنه الفضاء $([0,1[, |.|)$ غير تام.

② $\overline{[5,7]} = [5,7] - [5,7]$

$\Rightarrow [5,7]$ مجموعة مغلقة $\Rightarrow$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$([5,7],|.|,|.|)$ فضاء تام في $(R,|.|,|.|)$

$]\frac{1}{3},5] = [\frac{1}{3},5] + ]\frac{1}{3},5]$ ... (3)

(4) ... ⟸

$[5,]\frac{1}{3},5]$ مجموعة غير مغلقة ⟸ $(]\frac{1}{3},5],|.|,|.|)$ غير تام.

(4) المجموعة $\{1,2,3,\dots,n\}$ مجموعة منتهية ضمن مغلقة في الفضاء $(R,|.|,|.|)$ ومنه الفضاء الجزئي $(\{1,2,3,\dots,n\},|.|,|.|)$ هو فضاء تام.

حلة (1) بطرح.

$(u_n = \frac{n}{n+1})$ في $0 < \frac{n}{n+1} < 1$

$u_n \in ([0,1[,|.|,|.|)$

$u_n$ متتالية من الفضاء $([0,1[,|.|,|.|)$

$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

⟸ $u_n$ متتالية أساسية من نقاط الفضاء $([0,1[,|.|,|.|)$ ولكنها متقاربة من (1) نقطة خارج الفضاء ⟸ الفضاء غير تام.

السؤال الرابع:

لنأخذ في الفضاء المتري الاقليدي $(R^3,d)$ المجموعتين الآتيتين:

$X = \{(x,y,z) \in R^3, (x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2 \geq 4\}$

$Y = \{(x,y,z) \in R^3, x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

المطلوب: تحقق أن كل من الفضائين الجزئيين $(X,d)$ و $(Y,d)$ فضاء تام أم لا.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 \geq 4\}$

$\mathbb{R}^3 \setminus X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 < 4\}$

$\mathbb{R}^3 \setminus X$ كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3, d)$ فرضاً مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3, d)$ ومنه متمم $X$ مجموعة مغلقة بالتالي $(X, d)$ فضاء جزئي تام (حسب مرهنة).

$\mathbb{R}^3 / Y = \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , x^2+y^2+z^2 < 1\}}_{A} \cup \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , x^2+y^2+z^2 > 1\}}_{B}$

$\mathbb{R}^3 / Y = A \cup B$

$A$ كرة مفتوحة فهي مجموعة مفتوحة

$\mathbb{R}^3 / B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

$\mathbb{R}^3 \setminus B$ هي كرة مغلقة ومنه فرضاً مجموعة مغلقة ومنه متمم مجموعة مفتوحة ومنه $B$ مجموعة مفتوحة $A \cup B$ مجموعة مفتوحة لأنه اجتماع مجموعتين مفتوحتين بالتالي $\mathbb{R}^3 \setminus Y$ مجموعة مفتوحة ومنه $Y$ مجموعة مغلقة بالتالي $(Y, d)$ فضاء جزئي تام.

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z