كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمارين:

① $y''+2y'-y=0$

معادلة مميزة:

$m^2+2m-1=0$

$\Delta = b^2-4ac = 4-4(1)(-1) = 4+4 = 8$

$m_1 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$, $m_2 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$

$y_{h(x)} = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})x}$

② $y''+y'+y=0$

$m^2+m+1=0$

$\Delta = b^2-4ac = 1-4(1)(1) = -3<0$

جذور عقدية

$m_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \longrightarrow y_h = e^{-\frac{1}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

③ $y''+4y'+4y=0$

$m^2+4m+4=0$

$(m+2)^2=0$

$m_1=m_2=-2 \longrightarrow y_h = (C_1+C_2x)e^{-2x}$

- حلة المعادلات الخطية المتجانسة من المرتبة n ذات الأمثال الثابتة:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

حل هذه المعادلة هو $y = e^{mx}$

نفرض أن الحل من الشكل $y = e^{mx}$

$$m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

نحصل منها على الجذور n جذر

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

نميز الحالات:

① $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_n$ قيمة مختلفة

$$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \dots + C_n e^{m_n x}$$

② جميع الجذور حقيقية وأحد الجذور مكرر k مرة:

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n$$

$$m_{x+1} \neq \dots \neq m_n$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_x x^{k-1}) e^{mx} + C_{x+1} e^{m_{x+1} x} + \dots + C_n e^{m_n x}$$

③ إذا كانت الجذور عقدية

$$m_{1,2} = \alpha_1 \mp i\beta_1$$

$$m_{3,4} = m_{5,6} = m_{7,8} = \alpha_2 \mp i\beta_2$$

$$y(x) = e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}((C_3 + C_4 x + C_5 x^2)\cos \beta_2 x + (C_6 + C_7 x + C_8 x^2)\sin \beta_2 x)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4. في حالة جذور عقدية مكررة مرتبة:

$m_{1/2} = \alpha_1 \mp i\beta_1$

$m_{3/4} = m_{5/6} = \alpha_2 \mp i\beta_2$

$m_7 = m_8 = m_9 = m$ (نظرية)

مثال:

$y^{(3)} + 2y'' - 3y' = 0$

$m^3 + 2m^2 - 3m = 0$

$m(m^2 + 2m - 3)$

$m_1 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(-3) = 16$

$m_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$, $m_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$

$y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-3x}$

مثال:

$(D-2)^3 (D+1)(D+2) y = 0$

مشتقة مرتبة أولى:

(1) $(m-2)^3 (m+1)(m+2) = 0$

$m_1 = m_2 = m_3 = 2$

$m_4 = -1$, $m_5 = -2$

$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{2x} + C_4 e^{-x} + C_5 e^{-2x}$

(2) $(D^3 - 1)(D-1)^2 y = 0$

$(m^3 - 1)(m-1)^2 = 0$

$(m-1)(m^2+m+1)(m-1)^2 = (m-1)^3 (m^2+m+1) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$m_1 = m_2 = m_3 = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$

$m_{4,5} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(C_4 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

(3) $(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$

$m^3 - 3m^2 + 9m + 13 = 0$

$\Leftarrow m = -1$

$-1 - 3 - 9 + 13 = 0 \Rightarrow -13 + 13 = 0$

نقسم على $m+1$ بالقسمة نجد:

$(m+1)(m^2 - 4m + 13) = 0$

$m_1 = -1, \; m_{2/3} = 2 \mp 3i$

$y(x) = C_1 e^{-x} + e^{2x}(C_2 \cos(3x) + C_3 \sin(3x))$.

(4) $y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0$

$m^6 + 3m^4 + 3m^2 + 1 = 0$

$(m^2+1)^3 = 0$

$m^2 = -1$

$m_{1/2} = \mp i$

$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\cos x + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2)\sin x$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حلّ المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات الأمثال الثابتة:

الشكل العام لهذه المعادلة:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = R(x) \quad \dots (1)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ ثوابت

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = R(x)$$

$$\Phi(D)\, y = R(x) \quad \dots (2)$$

معادلة المميزة $\Phi(m) = 0$

وهي المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة.

نظرية: الشرط اللازم والكافي حتى يكون $y(x)$ الحلّ العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير متجانسة وهو أن تكتب على شكل مايلي

$$y(x) = y_h + y_p$$

البرهان باتجاهين.

الاتجاه (1):

نفرض $y(x)$ حل للمعادلة غير المتجانسة (2)

y_p حل خاص للمعادلة (2)

نبرهن أن $y - y_p = y_h$ حلّ للمتجانسة

$$\Phi(D) = R(x)$$

$$\Phi(D) y_p = R(x)$$

$$\Phi(D) y = 0 \quad \text{متجانسة}$$

$\Rightarrow y - y_p$ حلّ للمتجانسة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الاتجاه 2:

$y = y_h + y_p$ ولنبرهن أنّ y هو حلّ للمعادلة (2):

① ← $\Phi(D)y_h = 0$ ، y_h حل للمعادلة المتجانسة

② ← $\Phi(D)y_p = R(x)$ ، y_p حلّ خاص لـ (2)

نجمع ① و ② نجد:

$$\Phi(D)(y_h + y_p) = R(x)$$

$y_h + y_p$ تحقق (2) أي حلّ لـ 2.

نتيجة: لإيجاد الحلّ العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

1- نوجد الحلّ العام للمعادلة المتجانسة.

2- نبحث عن حلّ خاص للمعادلة غير المتجانسة y_p وبوجه عامّ طرق.

a- طريقة المؤثر العكسي.

b- طريقة المعادلات غير المميزة.

c- طريقة لاغرانج

a- طريقة المؤثر العكسي:

$\Phi(D)y = R(x)$ ---②

y_p حل خاص لـ 2

$$\Phi(D)y_p = R(x)$$

$$y_p = \frac{1}{\Phi(D)}R(x)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خواص المؤثر العكسي $\frac{1}{\varphi(D)}$

$\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)dx$ ①

أي أن $\frac{1}{D}$ يمثل التكامل بالنسبة لـ x

و $\frac{1}{D^k}$ يمثل التكامل بالنسبة لـ x k مرة.

$\frac{1}{\varphi(D)} e^{ax} = \frac{1}{\varphi(a)} e^{ax}$, $\varphi(a) \neq 0$ ②

$\frac{1}{\varphi(D^2)} \cos(ax+b) =$ ③

بالمكاملة مرتين:

$= \frac{1}{\varphi(-a^2)} \cos(ax+b)$; $\varphi(-a^2) \neq 0$

$\frac{1}{\varphi(D^2)} \sin(ax+b) = \frac{1}{\varphi(-a^2)} \sin(ax+b)$; $\varphi(-a^2) \neq 0$ ④

$\frac{1}{\varphi(D)} e^{ax} U(x) = e^{ax} \frac{1}{\varphi(D+a)} U(x)$ ⑤

$\frac{1}{\varphi(D)} (f_1(x) + f_2(x)) = \frac{1}{\varphi(D)} f_1(x) + \frac{1}{\varphi(D)} f_2(x)$ ⑥

$\left(\frac{1}{\varphi_1(D)} + \frac{1}{\varphi_2(D)}\right) f(x) = \frac{1}{\varphi_1(D)} f(x) + \frac{1}{\varphi_2(D)} f(x)$ ⑦

$\frac{1}{\varphi_1(D)\varphi_2(D)} f(x) = \frac{1}{\varphi_1(D)} \left(\frac{1}{\varphi_2(D)} f(x)\right) = \frac{1}{\varphi_2(D)} \left(\frac{1}{\varphi_1(D)} f(x)\right)$ ⑧

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$F(D)\cdot\frac{1}{\varphi(D)}f(x)=F(D)\left(\frac{1}{\varphi(D)}f(x)\right)=\frac{1}{\varphi(D)}\left(F(D)f(x)\right)\quad(9$$

$$\frac{1}{\varphi(1)}c=\frac{c}{\varphi(0)}\quad(10$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z