كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : العاشرة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

النظريات التي تغيب فيه برهانه أنه مجموعة ما
جزئية زمرة جزئية من الزمرة المتواة فيط

نظرية (1):

إذا كانت $H \subseteq G$ و $H \neq \varphi$ و $(G,*)$ زمرة ما عندئذ الشرط
اللازم والكافي حتى تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة
$(G,*)$ هو أن يتحقق الشرطان

$(*) \forall a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$ ، $(**) \forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

لزوم الشرط: الفرض: G زمرة ما و $(H,*)$ زمرة جزئية
منط

الطلب: تحقق الشرطان (1 و 2)

البرهان:

بما أن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة G بالتالي فرن
تحقق جميع شروط الزمرة وبالتالي:

$(1) \forall a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$ ، $(2) \forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

والشرطان محققان

كفاية الشرط:

الفرض: G زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية
منه G تحقق الشرطان (1) و (2)

الطلب: $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

البرهان: حتى نبرهن أنّ H زمرة جزئية من G يجب أن نبرهن أنّ H زمرة أي تحقق جميع شروط الزمرة (حسب تعريف الزمرة الجزئية).

أ). نلاحظ أنّ $H\neq\varnothing$ حسب تعريف و أنّ $H\subset G$ حسب تعريف H.

ب). إنّ العملية $*$ معرفة على عناصر H.

① $\forall a,b\in H\Rightarrow a*b\in H$.

② $\forall a\in H\Rightarrow a^{-1}\in H$

لأنّ الشرط الأول محقق وهو

$\forall a,b\in H\Rightarrow a*b\in H$.

ج). إنّ العملية $*$ تجميعية على عناصر G لأنّ G زمرة بالتالي فرضاً تجميعية على جميع عناصر $H\subset G$ أيضاً أي أنّ $\forall a,b,c\in H\Rightarrow (a*b)*c=a*(b*c)$

د). وجود العنصر الحيادي بما أنّ $H\subset G$ و H مجموعة غير خالية وبالتالي يوجد عنصر واحد على الأقل ولتكن $a\in H$ و $a\in H\Rightarrow a^{-1}\in H$.

$a,a^{-1}\in H\Rightarrow a*a^{-1}=e\in H\Rightarrow e\in H$

بفرض أنّ م العنصر الحيادي في الزمرة G وبما أنّ م العنصر الحيادي في الزمرة $(G,*)$ وبالتالي

$(\forall a\in H\subset G: a*e=a\wedge e*a=a)$ *

إذاً م هو العنصر الحيادي في H ويحقق الملاحظة *

وجود العنصر النظير (المقلوب): $\forall a\in H\Rightarrow a^{-1}\in H$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وهو يحقق: $a*a^{-1}=e \wedge a^{-1}*a=e$

ممّا سبق نجد أنّ $(H,*)$ زمرة وبالتالي فهي زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

نظرية(2): إذا كانت $(G,*)$ زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية من G أي $H\subset G \wedge H\neq\varphi$ عندئذٍ الشرط اللازم والكافي لكي تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ هو أن يتحقق الشرط الثاني:

$$\forall a,b\in H \Rightarrow a*b^{-1}\in H$$

لزوم الشرط: $(G,*)$ زمرة و $H\subset G \wedge H\neq\varphi$ و $(H,*)$ زمرة جزئية

الطلب: تحقق الشرط.

البرهان: بما أنّ $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ وبالتالي $\forall a,b\in H \Rightarrow a,b^{-1}\in H \Rightarrow a*b^{-1}\in H$.

كفاية الشرط:

الفرض $(G,*)$ زمرة و $H\subset G \wedge H\neq\varphi$

الطلب: $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة G.

البرهان: حتى نبرهن أنّ H زمرة جزئية من الزمرة G سنعتمد على شروط النظرية الأولى السابقة أي نبرهن أنّ H تحقق الشرطان ① و ② الواردة في النظرية السابقة أي نبرهن الشروط

① $\forall a,b\in H \Rightarrow a*b\in H$ ، ② $\forall a\in H \Rightarrow a^{-1}\in H$.

$\Leftarrow$

$$\forall a\in H \Rightarrow a*a^{-1}=e\in H.$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بفرضه e العنصر الحيادي في الزمرة G وبالتالي:

$e, a\in H \Rightarrow a^{-1}=e*a^{-1}\in H\subseteq G.$

وبالتالي فإنّ الشرط التالي محقق وهو

$\forall a\in H \Rightarrow a^{-1}\in H.$

يبقى علينا أن نبرهن أنّ

$\forall a,b\in H \Rightarrow a*b\in H.$

لدينا $a,b\in H \Rightarrow a,b^{-1}\in H \Rightarrow a*(b^{-1})^{-1}\in H \Rightarrow a*b\in H.$

وبالتالي تحقق الشرطان الموجودان في النظرية الأولى وبالتالي $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة G.

نظرية 3:

إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G ومنتهية عندئذٍ فإنّ الشرط اللازم والكافي حتى تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ هو أن يتحقق الشرط $\forall a,b\in H \Rightarrow a*b\in H$

حتى يطبق الشرط الحالية في النظرية (3) يجب أن تكون H منتهية

ملاحظة:

في التطبيقات العملية (برهان التمارين) حتى نبرهن أنّ H زمرة جزئية من الزمرة المفروضة $(G,*)$ يجب أن نبرهن أنّ H مجموعة جزئية غير خالية من G ثانياً نتأكد أنّ H زمرة من G ببرهان

إما P الشرطين ① $\forall a,b\in H \Rightarrow a*b\in H$ ② $\forall a\in H \Rightarrow a^{-1}\in H$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ب). الشرط (الموجود في النظرية الثالثة):

$\forall a,b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$.

أو:

ج). الشرط الموجود في النظرية الثالثة (بشرط أن تكون H مجموعة منتهية).

$\forall a,b \in H \Rightarrow a * b \in H$.

ملاحظة هامة: هناك طريقة أخرى معتادة لبرهان أن H زمرة جزئية من G وهي برهان أن H زمرة أي تحقق جميع شروط الزمرة ولكنها طويلة بالنسبة للطرق السابقة.

مثال:

لتكن $(Q^*,.)$ زمرة الأعداد الكسرية بالنسبة لعملية الضرب العادية $(.)$. اثبت أن مجموعة المقادير

$$H=\left\{ a=\frac{1+2n}{1+2m} \in Q^*, n,m \in Z \right\}$$

تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(Q,.)$

الحل:

لبرهان أن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(Q^*,.)$ نبرهن:

أولاً: أن $H \subset Q^*$ نلاحظ أن $H \neq \varphi$ لأنها تحتوي على مجموعة جزئية من المجموعة Q^* أي أن $H \subset Q^*$ كذلك فإن

$$e=1=\frac{1+2.0}{1+2.0} \in H ; \quad n=m=0 \in Z.$$

بالتالي $H \neq \varphi$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أعبي أنّ $H \neq \emptyset \wedge H \subseteq G$

ثانياً: نتحقق أنّ H تحقق شروط الزمرة الجزئية.

طريقة 1: برهان الشروط الموجودة في النظرية الأولى

أعبي نبرهن أنّ:

① $\forall a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$.

② $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

$\forall a = \frac{1+2n}{1+2m}, a' = \frac{1+2n'}{1+2m'} \in H ; n,m,n',m' \in \mathbb{Z}$

لدينا $a.a' = \left(\frac{1+2n}{1+2m}\right).\left(\frac{1+2n'}{1+2m'}\right) = \frac{1+2n'+2n+4nn'}{1+2m'+2m+4mm'}$

$= \frac{1+2(n'+n+2nn')}{1+2(m'+m+2mm')} \in H = \frac{1+2n''}{1+2m''} \in H.$

$\in \mathbb{Z}$ $\in \mathbb{Z}$

$; n'+n+2nn' = n'' \in \mathbb{Z}$

$; m'+m+2mm' = m'' \in \mathbb{Z}$.

يبقى علينا برهان الشرط الثاني:

$\forall a = \frac{1+2n}{1+2m} \in H ; n,m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^{-1} = \frac{1+2m}{1+2n} \in H ; n,m \in \mathbb{Z}$.

منه أولاً وثانياً نجد أنّ $(H,.)$ زمرة جزئية من الزمرة

$(G,*) = (\mathbb{Q}^*,.)$

طريقة ثانية من ثانياً:

نبرهن أنّ H تحقق الشرط:

$\forall a,b \in H \Rightarrow a*b^{-1} \in H$

$\forall a = \frac{1+2n}{1+2m}, b = \frac{1+2n'}{1+2m'} \in H ; n,m,n',m' \in \mathbb{Z}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لدينا $a.b^{-1} = \frac{1+2n}{1+2m} \cdot \frac{1+2m'}{1+2n'} = \frac{1+2m'+2n+2(2nm')}{1+2n'+2m+2\cdot(2mn')}$

$= \frac{1+2(m'+n+2m'n)}{1+2(n'+m+2mn')} \in H \Rightarrow n'' = m'+n+2nm' \in Z$

$m'' = n'+m+2mn' \in Z$

ملاحظة هامة:

إنّ الشرط الموجود في النظرية الثالثة لبرهان أنّ H زمرة جزئية من $(G,*)$ و $(\varphi^*,.)$ لا يمكن تطبيقه لأنّ H مجموعة غير منتهية

مثال:

إنّ تقاطع أسرة من الزمر الجزئية في زمرة ما هو زمرة جزئية أي إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و $\{(H_x,*)\}$ أسرة من الزمر الجزئية من الزمرة G والمطلوب برهان أنّ:

$(\bigcap_{x\in I} H_x, *)$ هو زمرة جزئية ما من الزمرة G.

البرهان:

P: بما أنّ $(H_x,*)$ هو زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ وذلك $\forall x\in I$ بالتالي $H_x \subseteq G$ ، $H_x \neq \varphi$

وبالتالي $\bigcap_{x\in I} H_x \subseteq G$ و $\bigcap_{x\in I} H_x \neq \varphi$ أي $\varphi \neq \bigcap H_x \subseteq G$

ج) $\forall a,b \in \bigcap_{x\in I} H_x \Rightarrow a,b \in H_x \ \forall x\in I$.

$\Rightarrow a*b^{-1} \in H_x ; \forall x\in I$

لأنّ (H_x) زمرة جزئية من G

$\Rightarrow a*b^{-1} \in \bigcap_{x\in I} H_x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نبين أن $\bigcap_{x\in I} H_x$ زمرة جزئية من P وبما أنه $(\bigcap H_x, *)$ زمرة جزئية من الزمرة G.

ط ج.

P بما أنه $(H_x, *)$ هي زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ وذلك بالتالي $\forall x\in I$ $H_x \subset G$, $H_x \neq \varphi$ وذلك $\forall x\in I$.

ب).

$$\forall a,b \in \bigcap_{x\in I} H_x \Longrightarrow a,b \in H_x ; \forall x\in I$$

$$\Longrightarrow a*b \in H_x ; \forall x\in I$$

$$a*b \in \bigcap_{x\in I} H_x \Longleftarrow$$ (لأنه H_x زمرة جزئية من G)

ج). $\forall a \in \bigcap_{x\in I} H_x$ وبما أنه $(H_x, *)$ زمرة جزئية من الزمرة G وذلك $\forall x\in I$ وبالتالي $a^{-1}\in H_x$ وذلك

$$a^{-1} \in \bigcap_{x\in I} H_x \Longleftarrow \forall x\in I$$

نبين أنه من P و ب و ج أنه $\bigcap_{x\in I} H_x$ هو زمرة جزئية من الزمرة G

ملاحظة: استخدمنا في الطريقة الثانية الشرطين ب و ج وهما:

① $\forall a,b\in H \Rightarrow a*b\in H$, ② $\forall a\in H \Rightarrow a^{-1}\in H$

ملاحظة: لايمكننا تطبيق الشرط $\forall a,b\in H \Rightarrow a*b\in H$. في برهان التمرين السابق لأننا لا نعلم فيما إذا كانت $H = \bigcap_{x\in I} H_x$ مجموعة منتهية أيضاً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: إذا كانت $(Z,+)$ زمرة اثبت أن:

$4Z=\{0,\pm4,\pm8,\pm12,\dots\}$ أو $4Z=\{\dots,-8,-4,0,4,8,12\}$

و أن $(5Z,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(Z,+)$

حيث $5Z=\{\dots,-10,-5,0,5,10,\dots\}$

ثم تحقق فيما إذا كانت $(4Z\cup5Z,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(Z,+)$

أن $(4Z\cup5Z,+)$ ليست زمرة جزئية لأنه بفرض أخذنا $a=4$ و $b=5$ من المجموعة

$4Z\cup5Z=\{\dots,-10,-8,-5,-4,0,4,5,8,10,\dots\}$

$a+b=4+5=9\notin4Z\cup5Z$

وبالتالي الشرط $\forall a,b\in H\Rightarrow a*b\in H$ غير محقق

إذاً $4Z\cup5Z$ ليست زمرة وبشكل عام فإن اجتماع زمرتين جزئيتين من زمرة ليست زمرة جزئية منظ إذا اجتماع أسرة من الزمر الجزئية من الزمرة G بشكل عام ليس من الضرورة أن يكون زمرة جزئية منظ

رتبة زمرة ما:

تكون الزمرة G منتهية إذا كانت تحوي عدداً منتهياً من العناصر المختلفة بمنظ عنه بعضها وتكون الزمرة G غير منتهية إذا كانت تحوي عدداً غير منتهياً من العناصر المختلفة بمنظ عنه بعضها ونعني عدد عناصر أي زمرة G المختلفة بمنظ عنه بعضها برتبة الزمرة G ونرمز لها بالرمز $O(G)$ فإذا كانت G زمرة منتهية وعدد

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عناصرها هو n حيث $n<\infty$ عندئذٍ وفي هذه الحالة نكتب $O/G = |G| = n < \infty$

وفي هذه الحالة نقول أن رتبة الزمرة عدد منته أما في حال كانت الزمرة G غير منتهية نكتب $O(G) = \infty$ ونقول أن رتبة G غير منتهية

بعض الأمثلة:

$(Z,+)$ زمرة غير منتهية لأن Z مجموعة غير منتهية وبالتالي رتبتها غير منتهية أي: $O(G) = O(Z) = \infty$

الزمرة $(\overline{Z}_5, \oplus)$ زمرة منتهية ورتبتها منتهية لأن $O(G) = O(\overline{Z}_5) = |\overline{Z}_5| = 5 < \infty$

$\overline{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

رتبة العنصر:

إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و a عنصر ما في G ندعو أصغر عدد صحيح موجب n تتحقق من أجله العلاقة $a^n = e$ برتبة العنصر a في G واختصاراً رتبة العنصر a ونرمز لها بالرمز $O(a)$ وفي هذه الحالة نكتب $O(a) = n < \infty$

ونقول أن رتبة العنصر a منتهية أو محدودة وفي حال لا يوجد العدد n الذي تتحقق من أجله العلاقة $a^n = e$ ونقول أن رتبة العنصر a غير منتهية ونكتب $O(a) = \infty$

ملاحظة: لإيجاد رتبة العنصر $a \in G$ حيث G زمرة وa عنصر ما فيها يكفي حساب متتالية القوى

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$a^1, a^2, a^3, \ldots\ldots, a^n$

حيث نصل إلى العنصر الحيادي e في الزمرة G لأول مرة وفي هذه الحالة فإن الأس يكون ساوياً لرتبة العنصر a وإذا لم نصل على العنصر الحيادي نقول أن رتبة a غير منتهية

مثال: اوجد رتبة كل من العناصر في الزمرة $G=\{1,-1,i,-i\}$ حيث $(G,\cdot)$ هي زمرة.

حيث العنصر الحيادي في هذه الزمرة هو $1=e$

$o(1)=?$ حيث $a=1=e$ دوماً وابداً فإن رتبة العنصر الحيادي هي الواحد لأنك $a^1=e^1=e \Rightarrow o(e)=1$

أي $o(1)=1$

رتبة العنصر $a=-1$ نأخذ قوى العنصر $a=-1$

$(-1)^1=-1\neq e=1$

$(-1)^2=1=e=e \Rightarrow o(-1)=2$

رتبة العنصر $a=i$ نأخذ قوى العنصر i

$(i)^1=i\neq 1=e$

$i^2=-1\neq 1=e$

$i^3=-i\neq 1=e$

$i^4=i^2.i^2=(-1)\times(-1)=1=e \Rightarrow o(i)=4$

وبنفس الطريقة نحسب $o(-i)$

مثال: اوجد رتبة العنصر $\overline{7}$ و $\overline{7}^{-1}$ في الزمرة $(\overline{Z}_9,\oplus)$

ملاحظة: في حال كانت العملية جمع عندئذٍ فإننا نعرف رتبة العنصر a بأنها اصغر عدد صحيح موجب يحقق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: أي $n.a=e$ $\Leftarrow$ $a+a+\dots+a=e$

بالعودة إلى المثال:

إن العنصر الحيادي في الزمرة $(\overline{Z}_6,\oplus)$ هو $e=0$ و $a=\overline{2}$

$1.\ \overline{2}\neq\overline{0}=e$

$2.\ \overline{2}=\overline{2}\oplus\overline{2}=\overline{2+2}=\overline{4}\neq\overline{0}=e$

$3.\ \overline{2}=\overline{2}\oplus\overline{2}\oplus\overline{2}=\overline{2+2+2}=\overline{6}=\overline{0}=e$

$4.\ \overline{2}=\overline{2}\oplus\overline{2}\oplus\overline{2}\oplus\overline{2}=\overline{2+2+2+2}=\overline{8}=\overline{0}=e$

$5.\ \overline{2}=\overline{2}\oplus\overline{2}\oplus\overline{2}\oplus\overline{2}\oplus\overline{2}=\overline{10}=\overline{0}=e \Rightarrow o(2)=5$

$\overline{2}^{-1}=\overline{3}$

نحسب $o(\overline{2}^{-1})=o(\overline{3})$ بنفس الطريقة $o(\overline{2})$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z