كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية الاعداد

المحاضرة : التاسعة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

9

المحاضرة التاسعة
(عملي)

السؤال الأول: ليكن $p = 17$

1. أوجد جذر أساسي بالنسبة للمقاس 17 حسب اختبار لوكاس، ثم استنتج جذر أساسي بالنسبة للمقاس 289، ثم استنتج جذر أساسي بالنسبة للمقاس 34.
2. أوجد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً a الأقل من 17 والتي تحقق الشرط التالي $O_{17}(a) = 2$.
3. أوجد جميع الجذور الأساسية الأخرى بالنسبة للمقاس 34.
4. هل المجموعة $\{5^1, 5^2, 5^3, \dots, 5^{16}\}$ نظام بواقي مختزل بالقياس للعدد 34 أم لا، ولماذا؟
5. أوجد جدول الأدلة بالنسبة للمقاس 17 علماً بأنّ $g = 3$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس 17، ثم أوجد

$$Ind_3(10)$$

ثم أوجد العدد x الذي يحقق:

$$Ind_3(x) = 7$$

6. أوجد

$$Ind_3(171)$$

الحلّ:

1. إيجاد جذر أساسي بالنسبة للمقاس $p = 17$ (اختبار لوكاس)

$a \in \mathbb{Z}_{17}^* = \{1,2,3,4,5,6,7, \dots ,16\}$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس $p = 17$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$a^{\left(\frac{p-1}{q}\right)} \not\equiv 1(mod\ p)$$

وذلك من أجل كل قاسم أولي q للعدد $p - 1 = 16$.

نلاحظ بأنّ $q = 2$

- الشرط لا يتحقق من أجل $a = 1$، بالتالي $a = 1$ ليس جذر أساسي بالنسبة للمقاس 17.
- من أجل $a = 2$ نلاحظ بأنّ:

$$2^{\frac{16}{2}} = 2^8 \equiv 1(mod\ 17)$$

بالتالي $a = 2$ ليس جذر أساسي بالنسبة للمقاس 17.

- من أجل $a = 3$ نلاحظ بأنّ

$$3^{\frac{16}{2}} = 3^8 \not\equiv 1(mod\ 17)$$

بالتالي $a = 3$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس 17.

<u>إيجاد جذر أساسي بالنسبة للمقاس $289 = 17^2$</u>

لدينا $g = 3$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس 17، نحسب $g^{p-1} = 3^{16}$

$$3^{16} \not\equiv 1(mod\ 17^2)$$

بالتالي $g = 3$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس $289 = 17^2$

<u>إيجاد جذر أساسي بالنسبة للمقاس $34 = 2 \times 17$</u>

لدينا $3 = g$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس 17، و $3 = g$ فردي عندئذ $3 = \acute{g}$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس 34.

2. لدينا 3 جذر أساسي بالنسبة للمقاس 17 عندئذ أياً كان $a \in \mathbb{Z}$ بحيث $\gcd(a, 17) = 1$ فإنّ $a \equiv 3^k (mod\ 17)$ حيث $1 \le k \le \phi(17)$ بالتالي

$$O_{17}(a) = O_{17}(3^k)$$

$$2 = \frac{O_{17}(3)}{\gcd(k, O_{17}(3))} = \frac{\phi(17)}{\gcd(k, \phi(17))} = \frac{16}{\gcd(k, 16)}$$

بالتالي $\gcd(k, 16) = 8$ عندئذٍ $k = 8$

بالتالي: $3^8 \equiv 16 (mod\ 17)$

عندئذٍ الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً a الأقل من 17 التي تحقق العلاقة $O_{17}(a) = 2$ هي:$\{16\}$.

3. نشكّل المجموعة التالية علماً أنّ 3 جذر أساسي بالنسبة للمقاس 34:

$$\{3^k; 1 \le k \le \phi(34)\ \&\ \gcd(k, \phi(34)) = 1\}$$

$$\{3^k; 1 \le k \le 16\ \&\ \gcd(k, 16) = 1\} = \{3^1, 3^3, 3^5, 3^7, 3^9, 3^{11}, 3^{13}, 3^{15}\}$$

نوجد بواقي قسمة عناصر المجموعة السابقة على العدد 34 فنجد:

$$3^1 \equiv 3 (mod\ 34)$$

$$3^3 \equiv 27 (mod\ 34)$$

$$3^5 \equiv 5 (mod\ 34)$$

$$3^7 \equiv 11 (mod\ 34)$$

$$3^9 \equiv 31 (mod\ 34)$$

$$3^{11} \equiv 7 (mod\ 34)$$

$$3^{13} \equiv 29 (mod\ 34)$$

$$3^{15} \equiv 23 (mod\ 34)$$

بالتالي الجذور الأساسية بالنسبة للمقاس 34 هي $\{3, 5, 7, 11, 23, 27, 29, 31\}$

4. بما أن 5 جذر أساسي بالنسبة 34 عندئذ المجموعة

$$\{5^1, 5^2, 5^3, \dots, 5^{\phi(34)}\} = \{5^1, 5^2, 5^3, \dots, 5^{16}\}$$

نظام بواقي مختزل بالقياس للعدد 34.

5. نحسب $3^k; 1 \le k \le \phi(17) = 16$ (3 جذر أساسي بالنسبة للمقاس 17).

3^k	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}
N	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1
$IndN$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

N: هو باقي قسمة 3^k على العدد 17. $IndN$: دليل العدد N

$$Ind_3(10) = 3$$

$$Ind_3(x) = 7 \Longrightarrow x = 11$$

6. $171 \equiv 1(mod\ 17)$ بالتالي $Ind_3(171) = Ind_3(1) = 16$

السؤال الثاني: ليكن $p = 37$

أوجد جذر أساسي بالنسبة للمقاس 37 حسب اختبار لوكاس، ثم استنتج جذر أساسي بالنسبة للمقاس 74.

الحلّ: إيجاد جذر أساسي بالنسبة للمقاس $p = 37$ (اختبار لوكاس)

$a \in \mathbb{Z}_{37}^* = \{1,2,3,4,5,6,7, \dots ,36\}$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس $p = 37$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$a^{\frac{p-1}{q}} \not\equiv 1(mod\ p)$$

وذلك من أجل كل قاسم أولي q للعدد $p - 1 = 36$.

نلاحظ بأنّ $q = 2$ أو 3

- الشرط لا يتحقق من أجل $a = 1$، بالتالي $a = 1$ ليس جذر أساسي بالنسبة للمقاس 37.
- من أجل $a = 2$ نلاحظ بأنّ:

$$2^{\frac{36}{q}}: \begin{cases} 2^{\frac{36}{2}} = 2^{18} \not\equiv 1(mod\ 37) \\ 2^{\frac{36}{3}} = 2^{12} \not\equiv 1(mod\ 37) \end{cases}$$

بالتالي $a = 2$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس 37.

<u>إيجاد جذر أساسي بالنسبة للمقاس $74 = 2 \times 37$</u>

لدينا $g = 2$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس 37، و $g = 2$ زوجي عندئذ $\acute{g} = 2 + 37 = 39$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس 74.

السؤال الثالث: ليكن $p = 23$

1. أوجد جدول الأدلة بالنسبة للمقاس 23 علماً بأنّ $g = 5$ جذر أساسي بالنسبة للمقاس 23.
2. أوجد العدد x الذي يحقق:

$$Ind_5(x) = 17$$

الحلّ: 1.

5^k	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8	5^9	5^{10}	5^{11}	5^{12}	5^{13}	5^{14}	5^{15}	5^{16}	5^{17}	5^{18}	5^{19}	5^{20}	5^{21}	5^{22}
N	5	2	10	4	20	8	17	16	11	9	22	18	21	13	19	3	15	6	7	12	14	1
$IndN$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

N: هو باقي قسمة 5^k على العدد 23. $IndN$: دليل العدد N

2.

$$Ind_5(x) = 17 \Longrightarrow x = 15$$
