كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية الاعداد

المحاضرة : السابعة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

7

المحاضرة السابعة
(عملي)

السؤال الأول:

إذا كان p عدداً أولياً و a عدداً صحيحاً فأثبت أنّ

$$p \mid (a^p + a(p-1)!)$$

الحلّ: لدينا p عدد أولي بالتالي حسب نتيجة من فيرما نجد

$$a^p \equiv a(mod\, p)$$

لدينا p عدد أولي بالتالي حسب ويلسون نجد:

$$(p-1)! \equiv -1(mod\, p)$$

$$\Rightarrow a(p-1)! \equiv -a(mod\, p)$$

$$\Rightarrow a^p + a(p-1)! \equiv a^p - a(mod\, p)$$

$$\Rightarrow a^p + a(p-1)! \equiv a - a(mod\, p)$$

$$\Rightarrow a^p + a(p-1)! \equiv 0(mod\, p)$$

بالتالي

$$p \mid (a^p + a(p-1)!)$$

السؤال الثاني:

إذا كان p عدداً أولياً فردياً والمطلوب أثبت أنّ

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 0\ (mod\, p)$$

الحلّ: لدينا p عدداً أولياً فردياً بالتالي حسب نتيجة من فيرما نجد

$$a^p \equiv a(mod\, p)$$

عندئذٍ

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + p - 1\ (mod\, p) \equiv \frac{p(p-1)}{2}\ (mod\, p)$$
$$\equiv 0\ (mod\, p)$$

السؤال الثالث:

إذا كان p عدداً أولياً فردياً والمطلوب أثبت أنّ

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv -1\ (mod\, p)$$

الحلّ: لدينا p عدداً أولياً فردياً بالتالي حسب فيرما نجد

$$a^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$$

حيث p لا يقسم a عندئذٍ

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv 1 + 1 + 1 + \cdots + 1\ (mod\, p) \equiv p - 1\ (mod\, p)$$
$$\equiv -1\ (mod\, p)$$

السؤال الرابع:

هل التطابق $x^2 \equiv -1(mod\ 11)$ قابل للحل أم لا ولماذا؟

الحلّ: التطابق $x^2 \equiv -1(mod\ 11)$ غير قابل للحل لأنّ

$$p = 11 \not\equiv 1(mod\ 4)$$

السؤال الخامس:

أوجد الحلين المختلفين للتطابق $x^2 \equiv -1(mod\ 13)$.

الحلّ: التطابق $x^2 \equiv -1(mod\ 13)$ قابل للحل لأنّ $p = 13 \equiv 1(mod\ 4)$

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! = 6! \equiv 5(mod\ 13)$$

بالتالي $x_0 = 5$

$$p - x_0 = 8$$

بالتالي الحلين المختلفين هما $\{5,8\}$.

السؤال السادس:

أوجد $O_{11}(5)$ ، ثم احسب $O_{11}(5^3)$.

الحل: لنضع $O_{11}(5) = k$ عندئذ

$$k \mid \phi(11)$$

بالتالي k أحد القواسم الموجبة للعدد $\phi(11) = 10$.

$$(5)^1 \not\equiv 1(mod\ 11)$$

$$(5)^2 \not\equiv 1(mod\ 11)$$

$$(5)^5 \equiv 1(mod\ 11)$$

نلاحظ بأنّ $O_{11}(5) = 5$

▪

$$O_{11}(5^3) = O_{11}(5^3) = \frac{O_{11}(5)}{\gcd\left(3, O_{11}(5)\right)} = \frac{5}{\gcd(3,5)} = 5$$

السؤال السابع:

أوجد $O_5(3)$ ، ثم احسب $O_5(9)$ ثم احسب $O_5(99)$

الحل: لنضع $O_5(3) = k$ عندئذ

$$k \mid \phi(5)$$

بالتالي k أحد القواسم الموجبة للعدد $\phi(5) = 4$.

$$(3)^1 \not\equiv 1(mod\ 5)$$

$$(3)^2 \not\equiv 1(mod\ 5)$$

$$(3)^4 \equiv 1 (mod\ 5)$$

نلاحظ بأنّ $O_5(3) = 4$

-

$$O_5(9) = O_5(3^2) = \frac{O_5(3)}{\gcd(2, O_5(3))} = \frac{4}{\gcd(2,4)} = 2$$

- لدينا $99 \equiv 9 (mod\ 5)$ عندئذ

$$O_5(99) = O_5(9) = 2$$

السؤال الثامن:

أوجد $O_{13}(331)$

الحلّ:

$$331 \equiv 6 (mod\ 13)$$

عندئذ

$$O_{13}(331) = O_{13}(6)$$

- لنضع $O_{13}(6) = k$ عندئذ

$$k \mid \phi(13)$$

بالتالي k أحد القواسم الموجبة للعدد $\phi(13) = 12$.

$$(6)^1 \not\equiv 1 (mod\ 13)$$

$$(6)^2 \not\equiv 1 (mod\ 13)$$

$$(6)^3 \not\equiv 1 (mod\ 13)$$

$$(6)^4 \not\equiv 1 (mod\ 13)$$

$$(6)^6 \not\equiv 1 (mod\ 13)$$

$$(6)^{12} \equiv 1 (mod\ 13)$$

نلاحظ بأنّ

$$O_{13}(6) = 12$$

عندئذ:

$$O_{13}(331) = 12$$
