كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي ١

المحاضرة : السابعة /عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

ملاحظة: حتى يكون كل فضاء متري هو فضاء منظم يجب أن يحقق توطئة لا تغيّر في الانسحاب

① $d(x+z, y+z) = d(x,y)$

② $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x,y)$

التمرين الأول: ليكن S فضاء المتتاليات مسافته المترية:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1+|\xi_i - \eta_i|}$$

والمطلوب: هل المسافة المترية مولدة من نظيم أم لا؟

الحل: لنتحقق من شروط توطئة لا تغيّر في الانسحاب

① $d(x+z, y+z) \overset{??}{=} d(x,y)$

$$d(x+z, y+z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\xi_i + \psi_i - \eta_i - \psi_i|}{1+|\xi_i + \psi_i - \eta_i - \psi_i|} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1+|\xi_i - \eta_i|} = d(x,y) \implies$$ الشرط الأول محقق

② $$d(\alpha x, \alpha y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\alpha \xi_i - \alpha \eta_i|}{1+|\alpha \xi_i - \alpha \eta_i|} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\alpha| \cdot |\xi_i - \eta_i|}{1+|\alpha| \cdot |\xi_i - \eta_i|}$$

$$\neq |\alpha| \, d(x,y) \implies$$ الشرط الثاني غير محقق

وبالتالي S يعرّف عليه مسافة لا تولد نظيم

التمرين الثاني: تحقق أنه أياً كان الفضاء المتري المنفصل غير مولد من

نظيم ,
$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & ; \quad x=y \\ 1 & ; \quad x\neq y \end{cases}$$

الحل: نتحقق من شروط توطئة لاتغيّر في الانسحاب

نجد أنّ الشرط الأول محقّق ، نختبر الشرط الثاني:

$$d(\alpha x,\alpha y) \overset{?}{=} |\alpha| \cdot d(x,y)$$

بفرض $\alpha=4$ و $x\neq y$

$$\bullet\, d(\alpha x,\alpha y)=d(4x,4y)=1 \quad ; \quad x\neq y$$

$$\bullet\, |\alpha|\, d(x,y)=4\, d(x,y)=4\times 1=4$$

نلاحظ أنّ $d(\alpha x,\alpha y)\neq|\alpha|\, d(x,y)$

$$1\neq 4$$

الشرط غير محقّق ومنهُ الفضاء المتري المتقطع غير مولد من نظيم

التمرين الثالث: إذا كان d تابع مسافة على فضاء متجهي $\{0\}$ و X مولد بنظيم ولنعرّف

$$\tilde{d}(x,x)=0 \qquad \& \qquad \tilde{d}(x,y)=d(x,y)+1$$

بيّن أنّ $\tilde{d}$ لا يولد من نظيم ؟

الحل: لنتحقق فيما إذا كان:

$$\tilde{d}(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|\cdot\tilde{d}(x,y)$$

$$\ell_1=\tilde{d}(\alpha x,\alpha y)=d(\alpha x,\alpha y)+1=|\alpha|\, d(x,y)+1$$

$$\ell_2=|\alpha|\,\tilde{d}(x,y)=|\alpha|\,[d(x,y)+1]=|\alpha|\, d(x,y)+|\alpha|$$

$$\Rightarrow \ell_1\neq\ell_2$$

$\tilde{d}$ لا يولد من نظيم

التمرين الرابع: أثبت أنّ الكرة المفتوحة في فضاء منظم هي مجموعة محدبة ؟

الحل:

X فضاء منظم ولتكن B الكرة المفتوحة

$B(x_0, r) = \{x \in X \; ; \; \|x - x_0\| < r\}$

Z القطعة المستقيمة الواصلة بين x و y

$Z = (1-\alpha).x + \alpha y \; ; \; 0 \leq \alpha \leq 1 \quad , \quad x, y \in X$

حتى نثبت أنّ الكرة المفتوحة مجموعة محدبة يجب أن نثبت أنّ الكرة المفتوحة مجموعة محدبة يجب أن نثبت أنّ القطعة المستقيمة الواصلة بين نقاطها أصغر من r حيث r نصف قطر الكرة المفتوحة

$\|Z - x_0\| < r$

$\|(1-\alpha).x + \alpha y - x_0\| = \|(1-\alpha).x + \alpha y - x_0 + \alpha x_0 - \alpha x_0\|$

$= \|(1-\alpha).x + \alpha y - (1-\alpha).x_0 - \alpha x_0\|$

$= \|(1-\alpha)(x - x_0) + \alpha(y - x_0)\|$

$\leq \|(1-\alpha)(x - x_0)\| + \|\alpha(y - x_0)\|$

$= (1-\alpha).\|x - x_0\| + \alpha.\|y - x_0\|$

$< (1-\alpha).r + \alpha.r = r$

$\|Z - x_0\| < r$

الكرة المفتوحة هي مجموعة محدّبة

التمرين الخامس: عرّف ومثّل هندسياً كرة الواحدة في الفضاء $\mathbb{R}^2$ وفقاً للأنظمة:

① $\|x\|_\infty = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} = 1$

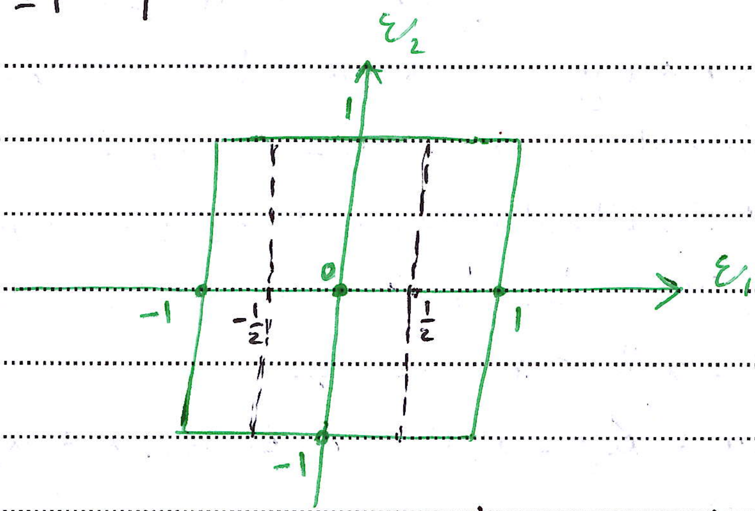
② $\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| = 1$

الحل:

$B(0, 1) = \{x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2\}$

$\|x\|_\infty = \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} = 1$

ε_1	0	± 1	$\pm \frac{1}{2}$
ε_2	± 1	0 ± 1	± 1



② $\|x\|_1 = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| = 1$

ε_1	0	± 1	$\pm \frac{1}{2}$
ε_2	± 1	0	$\pm \frac{1}{2}$