كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : السادسة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: تحقق أن $(l^\infty, \|\ \|)$ فضاء منظم؟

حيث $\|x\| = \sup_{i\in IN} (x_i)$

الحل:

① $\forall x \in l^\infty \quad ; \|x\| \geq 0$

$\|x\| = \sup_{i\in IN} |x_i| \geq 0$

$\|x\| = 0 \iff \sup |x_i| = 0 \iff x_i = 0 \quad \forall i \in IN \iff$

$x = 0$

② $\|hx\| = |h| \cdot \|x\| \quad ; h \in K$

$\|hx\| = \sup_{i\in IN} |hx_i| = \sup_{i\in IN} (|h| \cdot |x_i|) = |h| \sup_{i\in IN} |x_i| =$

$|h| \cdot \|x\|$

③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\| = \sup_{i\in IN} |x_i + y_i| \leq \sup_{i\in IN} (|x_i| + |y_i|) =$

$\sup_{i\in IN} |x_i| + \sup_{i\in IN} |y_i|$

$= \|x\| + \|y\|$

بعد مناقشة الشروط ① و ② و ③ نجد أن $(l^\infty, \|\ \|)$ فضاء منظم

التمرين الثاني: تحقق أن $(l^p, \|\ \|)$ فضاء منظم؟

الحل:

① $\|x\| \geq 0$ بالاعتماد على التعريف

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \iff \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} = 0 \iff \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = 0 \iff$$

$$|x_i|^p = 0 \iff x_i = 0 \iff x = 0 \qquad i \in \mathbb{N}$$

② $\forall x, y \in \ell^p$ & $\forall \lambda \in K$

$$\|\lambda x\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^p \cdot |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left[|\lambda|^p\right]^{1/p} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{1/p}$$

$$= |\lambda| \cdot \|x\|$$

③ $\forall x, y \in \ell^p$ $\quad \|x+y\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq$

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

حسب متراجحة منكوفسكي

بعد مناقشة الشروط ① و ② و ③ نجد أنّ $(\ell^p, \|\ \|)$ فضاء ناظم

التمرين الثالث: تحقّق أنّ الفضاء $(c[a,b], \|\ \|)$ فضاء ناظم حيث

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

الحل:

① $\forall x \in c[a,b]$

$$\|x\| = \max_{t \in c[a,b]} |x(t)| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \iff \max_{t \in c[a,b]} |x(t)| = 0 \iff x(t) = 0 \iff x = 0$$

② $\|hx\| \stackrel{?}{=} |h| \cdot \|x\| \quad ; \quad h \in \mathbb{R}$

$$\|hx\| = \max |h\, x(t)| = \max \left[|h| \cdot |x(t)|\right] =$$

$|h| \max|x(t)| = |h| \cdot \|x\|$

③ $\|x+y\| \overset{??}{\leq} \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\| = \max|x(t)+y(t)| \leq \max|x(t)| + \max|y(t)|$

$= \|x\| + \|y\|$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

بعد مناقشة الشروط ①، ② و ③ نجد أنّ $c[a,b]$ فضاء منظم.

التمرين الرابع: برهن أنّه في الفضاء الخطي المنظم:

② $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ فإنّ $\lambda_n \cdot x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \cdot x$ مستمر في الفضاء الخطي المنظم $(\cdot)$

① $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ فإنّ $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x+y$ مستمر في الفضاء الخطي المنظم $(+)$

الحل:

- $0 \leq \|x_n + y_n - (x+y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq$

$\|x_n - x\| + \|y_n - y\| = 0$

$\Rightarrow \|x_n + y_n - (x+y)\| = 0 \Rightarrow (x_n + y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x+y$

- $0 \leq \|\lambda_n x_n - \lambda x\| \xrightarrow[\text{تضييف وطرح } \lambda_n x]{} \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| =$

$\|(x_n - x)\lambda_n + (\lambda_n - \lambda)x\| \leq \|(x_n - x)\lambda_n\| + \|(\lambda_n - \lambda)x\|$

$= |\lambda_n| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\| = 0$

$\Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda x\| = 0 \Rightarrow \lambda_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \cdot x$

التمرين الخامس:

$S = \{x_n \in \ell^2 \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$

1 - أثبت أنّ S فضاء خطي جزئي من ℓ^2 ؟

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- $X_n \in S$; $X_n = (-1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$

أثبت أنّ X_n متقاربة في l^2.

احسب نهايتها.

استنتج إذا كانت S مغلقة أم لا ؟

الحل:

1- $\alpha, \beta \in K$, $x, y \in S$

$x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$

$\alpha x + \beta y \in S$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x + \beta y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta y_n =$$

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in S$$

2- l^2 فضاء تام ، كل متتالية لكوشي هي متتالية متقاربة فيه.

لنثبت أنّ X_n متقاربة يجب أن نبرهن أنّ X_n لكوشي.

$X_n = (-1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$

$X_m = (-1, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots)$

$$\|X_n - X_m\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2$$

نفرض $n > m$

$$|-1+1|^2 + |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|^2 + |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|^2 + \dots + |\frac{1}{n} - 0|^2 + |0-0|^2 + \dots$$

$$= 0 + m\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)^2 + (n-m)\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$= m\left[\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n \cdot m} + \frac{1}{m^2}\right] + \frac{n-m}{n^2}$$

$$= \frac{m}{n^2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{m}{n^2} \Rightarrow \lim_{n,m \to \infty} \|X_n - X_m\|^2 = 0$$

X_n متتالية لكوشي فهي متقاربة لأنّ l^2 فضاء تام.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

• إيجاد النّهاية: $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| \stackrel{?}{=} 0$

لنفرض $x = (-1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$

$$\|x_n - x\|^2 = |-1+1|^2 + |\tfrac{1}{n} - 0|^2 + |\tfrac{1}{n} - 0|^2 + \dots + |0-0|^2 + \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = 0$$

• S غير مغلقة لأنّه توجد متتالية $x_n \in S$ ومتقاربة إلى $x = (-1, 0, 0, \dots)$ لكن $x \notin S$ لأنّ

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = -1 + 0 + 0 + \dots = -1$$

$$\Rightarrow x \notin S$$

• طلب إضافي: هل $x_n \in S$ ؟

حتّى ينتمي x_n إلى S يجب أن يحقّق $\sum_{i=1}^{\infty} x_n = 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_n = -1 + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + 0}_{n \text{ حد}} = -1 + n\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \in S$$

التمرين السادس: لنعرّف على $\mathbb{R}^3$ المجموعة E_1 بالشكل:

$$E_1 = \{x = (\varepsilon_1, \varepsilon_1, 0) \; ; \; \varepsilon_1 \in \mathbb{R}\}$$

برهن أنّ E_1 هو فضاء خطي جزئي من E ؟

الحل:

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $x, y \in E_1$ ؛ $x = (\varepsilon_1, \varepsilon_1, 0) \in E$

$y = (\gamma_1, \gamma_1, 0)$

$$\alpha x + \beta y = \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1, 0) + \beta(\gamma_1, \gamma_1, 0) =$$

$$(\alpha\varepsilon_1, \alpha\varepsilon_1, 0) + (\beta\gamma_1, \beta\gamma_1, 0)$$

$$= (\alpha\varepsilon_1 + \beta\gamma_1, \alpha\varepsilon_1 + \beta\gamma_1, 0) \in E_1$$

E_1 فضاء خطي جزئي من E

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة