كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الخامسة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: $(c[a,b], d)$ فضاء تام أثبت ذلك إذا كان $d(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$ وماذا تستنتج ؟

الحل: $(X_n)_{n \ge 1}$ متتالية لكوشي كيفية في $c[a,b]$ بالتالي

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; \forall n, m \ge N(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \max |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \quad ; \; n, m \ge N(\varepsilon)$$

ومن أجل قيمة مثبتة لـ t فإن $(X_n(t))$ متتالية في R و R فضاء تام (كل متتالية لكوشي هي متتالية متقاربة)

بالتالي: $x_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} x(t)$ حيث $x(t) \in R$

لدينا $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$

وبجعل $m \to \infty$ فإن $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \max |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; d(x_n, x) < \varepsilon$$

وبما أن التقارب منتظم x معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$

$x \in c[a,b] \Leftarrow c[a,b]$ فضاء تام.

الاستنتاج: بعض الفضاءات المترية تامة بالنسبة لمتراك معرّف عليها

وغير تامة بالنسبة لمتراك آخر معرّف عليها

التمرين الثاني: أثبت أنّ (l^∞, d) فضاء تام حيث:

$$d(x,y) = \sup |x_i - y_i|$$

الحل: نأخذ متتالية $(X_n)_{n\geq 1}$ لكوشي في l^∞ فيجب تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; \forall n,m \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow$$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon \Rightarrow |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$$

ومن أجل قيمة مثبتة لـ i فإنّ $x_i^{(n)}$ هي متتالية لكوشي في $\mathbb{C}$ حيث $\mathbb{C}$ فضاء تام ((كل متتالية لكوشي هي متتالية متقاربة))

أي $x_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i \in \mathbb{C}$

لدينا $|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x_i^{(n)} - x_i| < \varepsilon$$

$$|x_i| = |x_i - x_i^{(n)} + x_i^{(n)}| \leq |x_i - x_i^{(n)}| + |x_i^{(n)}|$$

$$|x_i^{(n)}| \in l^\infty \Rightarrow |x_i^{(n)}| \leq k$$

ولدينا $|x_i - x_i^{(n)}| < \varepsilon$

$$|x_i| \leq \varepsilon + k = k' \Rightarrow |x_i| \leq k'$$

بالتالي المتتالية متقاربة وهي لكوشي

$\Leftarrow$ l^∞ فضاء تام.

التمرين الثالث: أثبت أنّ l^p فضاء تام حيث

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

الحل:

لتكن $x^n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ متتالية كيفية لكوشي في l^p

ولنبرهن أنّ هذه المتتالية متقاربة إلى نقطة من l^p

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \; ; \; \forall n,m \geq N(\varepsilon) \; ; \; d(x^n, x^m) < \varepsilon$

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \text{(I)}$$

$$\Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p \; ; \; \forall n,m \geq N(\varepsilon)$$

نرفع للقوة $\frac{1}{p}$

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon$$

من أجل قيمة وثبتة لـ i فإن $\xi_i^{(n)}$ هي متتالية لكوشي في $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ فضاء تام) ((كل متتالية لكوشي هي متتالية متقاربة))

$$\xi_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_i \in \mathbb{C}$$

وبتجميع النهايات من أجل $i \in \mathbb{N}$:

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$$

ولنبرهن أن $x \in l^p$

بالاستفادة من المتراجحة I وجعل $k \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(m)} - \xi_i|^p < \varepsilon^p$$

$$k \to \infty \text{ جعل} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p < \varepsilon^p \quad \text{(II)}$$

$$d(x^n, x) < \varepsilon$$

$$x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

$x^n - x \in l^p$ (II) وبالاعتماد على المتراجحة l^p وحسب تعريف

وبما أن $x^n \in l^p$

$$x = x^m - x + x^n \in l^p$$

كل متتالية لكوشي من l^p متقاربة في $l^p \Leftarrow l^p$ فضاء تام.

التمرين الرابع: $x_n = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$

أثبت أنها متتالية متقاربة في l^2 ؟

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$$

$$x_m = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots\right)$$

$$\lim_{n,m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

$$d(x_n, x_m) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

نفرض $n > m$ بالتالي:

$$d(x_n, x_m) = \left[\underbrace{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|^2 + \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|^2 + \dots}_{\text{من } m} + \underbrace{\left|\frac{1}{n} - 0\right|^2 + |0-0|^2 + \dots}_{\text{من } n-m}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[m\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|^2 + (n-m)\left|\frac{1}{n}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

بوضع $n = 2m$

$$\left[m\left|\frac{1}{2m} - \frac{1}{m}\right|^2 + (2m-m)\left|\frac{1}{2m}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[m\left|\frac{1}{2m}\right|^2 + m\left|\frac{1}{4m^2}\right|\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2m}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n,m \to \infty} (x_n, x_m) = 0$$

نفرض: $n = 2m+1$

$$\left[m\left|\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{m}\right|^2 + (2m+1-m)\left|\frac{1}{2m+1}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left[m\left|\frac{m-2m-1}{m(2m+1)}\right|^2 + (m+1)\left|\frac{1}{2m+1}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left[m\left|\frac{m^2+2m+1}{m^2(2m+1)^2}\right| + (m+1)\left|\frac{1}{2m+1}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$x_n = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$

متتالية لكوشي في l^2 و l^2 فضاء تام وكل متتالية لكوشي هي متقاربة $\Rightarrow$ x_n متتالية متقاربة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z