كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : العاشرة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

• تعريف المؤثر الخطي: ليكن $T: X \to Y$ مؤثراً حيث X و Y فضاءات منظمان (خطيان) حقيقيان معاً أو عقديان معاً، ندعو المؤثر T مؤثراً خطياً إذا تحقّق الشرطان:

1- $T(x+y) = Tx + Ty \quad ; \forall x, y \in X$

2- $T(\alpha x) = \alpha . Tx \quad ; \forall \alpha \in K \quad \& \quad \forall x \in X$

• بعض المفاهيم الأساسية والملاحظات:

1- يمكن دمج الشرطين (1.) و (2.) بشرط واحد وهو:

$\forall \alpha, \beta \in K (\mathbb{C} \text{ or } \mathbb{R}) \quad \& \quad \forall x_1, x_2 \in X$

$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$

2- الفضاء الصفري لـ T (نواة المؤثر T) ونرمز لها بالرمز $N(T)$ ونعرّفها بأنّها مجموعة العناصر x من المنطلق X والتي تحقّق $T_x = 0_y$ أي: $N(T) = \{x \in X \; ; \; Tx = 0_y\}$

3- المؤثر الخطي T يحقّق دوماً $T0_x = 0_y$ لأنّه إذا عوّضنا في الشرط (2.) عن المؤثر الخطي $\alpha = 0$ نجد أنّ:

$T0_x = T(0.0_x) = 0 \Rightarrow T0_x = 0_y$

نرمز لمجموعة جميع المؤثرات الخطية من X إلى Y بالرمز $L(X,Y)$

مثال ①: المؤثر المطابق:

$I: X \to Y$

$\forall x \in X \; ; \; I_x = x$ حيث X فضاء منظم (خطي) هو مؤثر خطي لأنّه:

$\forall \alpha, \beta \in K \quad \& \quad \forall x_1, x_2 \in X$

$I(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha I_{x_1} + \beta I_{x_2}$

مثال ②: المؤثر الصفري:

$\theta : X \longrightarrow Y$ حيث X و Y فضاءات منظمات (خطيان)

$\forall x \in X$; $\theta_x = 0_y$ هو مؤثر خطي لأنّ

$\theta_{(\alpha x_1 + \beta x_2)} = 0_y = \alpha 0_y + \beta 0_y = \alpha \theta_{x_1} + \beta \theta_{x_2}$

مثال ③: مؤثر المفاضلة:

إذا كان X فضاء خطي لمجموعة جميع كثيرات الحدود المعرفة على المجال الحقيقي $[a,b]$ عندئذٍ نعرّف على هذا الفضاء مؤثر المفاضلة بالشكل التالي: $T_{x(t)} = x'(t)$; $\forall t \in [a,b]$ & $\forall x \in X$

حيث $X = \{x ; x = x(t)$ & x كثيرة حدود$\}$ هو مؤثر خطي

نُترك برهانه للطالب.

مثال ④: مؤثر المكاملة:

نُعرّف على الفضاء الخطي والمنظم $c[a,b]$ وهو T بالشكل التّالي:

$T_{x(t)} = \int_a^b x(t)\,dt$; $\forall t \in [a,b]$

وهو مؤثر خطي

مبرهنة: المدى والفضاء الصّفري:

إذا كان $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow R(T) \subseteq Y$ مؤثراً خطياً حيث X و Y فضاءات منظمات (خطيان) فإنّ:

1. المدى $R(T)$ هو فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي Y الذي يقع فيه (أي في Y).
2. إذا كان $\dim D(T) = n < \infty$ فإنّ $\dim R(T) \leq n$.
3. الفضاء الصفري $N(T)$ هو فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي $D(T)$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان:

• برهان (1): حتى نبرهن أن $R(T)$ فضاء جزئي من الفضاء الخطي Y يجب أن نبرهن الشرط:

$$\forall \alpha,\beta \in K \ \& \ \forall y_1, y_2 \in R(T) \ ; \ \alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$$

بما أن $y_1, y_2 \in R(T)$ وبالتالي يوجد x_1 و x_2 من $D(T)$ بحيث يكون:

$$y_1 = Tx_1 \quad \& \quad y_2 = Tx_2$$

لدينا:

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1) + T(\beta x_2)$$
$$= T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in R(T)$$
$$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$$

و $R(T)$ فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي Y

• برهان (2): حتى نبرهن أن $\dim R(T) \leq n$ لنأخذ المجموعة الكيفية من الأشعة من $R(T)$ وهي:

$\{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}$ والتي فيها $n+1$ عنصراً

ولنبرهن أنها مرتبطة خطياً في $R(T)$

بما أن $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ عناصر من $R(T)$ وبالتالي يوجد على التوالي العناصر $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ من $D(T)$ بحيث يكون:

$$y_1 = Tx_1 \ , \ y_2 = Tx_2 \ , \ \dots \ , \ y_n = Tx_n \ , \ y_{n+1} = Tx_{n+1}$$

وبما أن $\dim D(T) = n < \infty$ وبالتالي مجموعة الأشعة (العناصر) $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ مرتبطة خطياً في الفضاء $D(T)$ وبالتالي فإن:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \theta_{D(T)} \quad \dots (*)$$

بحيث ليست جميع المقادير السلمية (الأعداد) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ معدومة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الآن: نؤثر بـ T على العلاقة ⊛ (نأخذ صورة الطرفين وفق المؤثر T):

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = T\theta_{D(T)} = O_{R(T)}$$

ولأنّ T مؤثر خطي:

$$\alpha_1 Tx_1 + \alpha_2 Tx_2 + \dots + \alpha_n Tx_n + \alpha_{n+1} Tx_{n+1} = O_{R(T)}$$

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} y_{n+1} = O_{R(T)}$$

بحيث ليست جميع الأعداد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ معدومة

وبالتالي المجموعة الكيفية $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ من $R(T)$ مرتبطة خطياً وبالتالي نلاحظ أنّ أي مجموعة في $R(T)$ من العناصر المؤلفة من $n+1$ أو أكثر من العناصر مرتبطة خطياً وبالتالي:

$$\dim R(T) \leq n$$

■ برهان (3): $N(T) \subseteq D(T)$ فضاء خطي جزئي من الفضاء $D(T)$ أي لنبرهن الشرط: $\forall \alpha, \beta \in K$ & $\forall x_1, x_2 \in N(T)$;

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$$

بما أنّ $x_1, x_2 \in N(T)$ وبالتالي $Tx_1 = O_{R(T)}$, $Tx_2 = O_{R(T)}$

لدينا

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = O_{R(T)}$$

$$\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$$

و $N(T)$ فضاء خطي جزئي من الفضاء $D(T)$.

نتيجة: إنّ المؤثرات الخطية تحافظ على الارتباط الخطي

■ تعريف المؤثر العكسي: إذا كان $T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ حيث X و Y فضاءان منظمان (خطيان) مؤثراً متبايناً عندئذٍ وفي هذه الحالة يوجد المؤثر العكسي:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$T^{-1}: R(T) \to D(T)$ والذي ينقل كل عنصر y_0 من $R(T)$ إلى عنصر x_0 من $D(T)$ بحيث يكون $y_0 \to x_0$

أي ويكون لدينا $\begin{cases} y_0 = Tx_0 \\ x_0 = T^{-1}y_0 \end{cases}$

$T^{-1}.T = I \quad \& \quad T.T^{-1} = I$

لأنّ: $T^{-1}.T = I$

$T^{-1}.Tx = T^{-1}(Tx) = T^{-1}.y = x = I(x) \quad ; \forall x \in D(T)$

لأنّ: $T.T^{-1} = I$

$T.T^{-1}y = T(T^{-1}y) = Tx = y = I(y) \quad ; \forall y \in R(T)$

• برهنة المؤثر العكسي:

ليكن X و Y فضائين خطيين (متجهيين) حقيقي أو عقدي وليكن:

$T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$

عندئذٍ فإنّ: أ- الشرط اللازم والكافي حتى يكون المؤثر العكسي $T^{-1}: R(T) \to D(T)$ موجوداً هو أن يكون:

$Tx = 0 \Rightarrow x = 0$

ب- إذا كان T^{-1} موجوداً فإنّ T^{-1} مؤثر خطي

ج- إذا كان $\dim D(T) = n < \infty$ وكان T^{-1} موجوداً فإنّ:

$\dim R(T) = \dim D(T)$

البرهان: • برهان أ:

لزوم الشرط: أي T^{-1} موجوداً ولنبرهن الشرط: بما أنّ T^{-1} موجود أ وبالتالي T متباين أي أنّ الشرط التالي محقق

$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad ; \forall x_1, x_2 \in D(T)$

لنضع في الشرط السابق $x_2 = 0$ فنجد أنّ

$Tx_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

كفاية الشرط: لدينا الشرط $Tx=0 \Rightarrow x=0$; $x \in D(T)$

ولنبرهن أن T متباين حتى نبرهن أنّ T^{-1} موجود

لدينا: $Tx_1 = Tx_2$

$\Rightarrow Tx_1 - Tx_2 = 0 \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = x_2 \Rightarrow$ T متباين

وبالتالي T^{-1} موجود.

■ المؤثرات الخطية المحدودة والمستمرة:

تعريف المؤثر الخطي المحدود: نقول عن المؤثر الخطي:

$T: D(T) \subseteq X \longrightarrow R(T) \subseteq Y$ حيث X و Y فضاءات منظمان أو خطيان عقديان معاً أو حقيقيان معاً أنّه محدود اذا تحقق الشرط التالي:

$\exists c \in \mathbb{R}$; $c>0$; $\|Tx\| < c.\|x\|$; $\forall x \in D(T)$

بعض الملاحظات:

أ- من أجل التبسيط نستخدم نفس رمز النظيم $\|\ \|$ في كلا الفضائين المنظمين X و Y و $D(T)$ و $R(T)$.

ب- هناك فرق بين مفهوم الدالة المحدودة في التحليل الحقيقي ومفهوم المؤثر المحدود في الفضاءات المنظمة حيث نقصد في المفهوم الأول الدالة التي تكون مجموعة قيمها (مداها) مجموعة محدودة بينما نقصد بالمفهوم الثاني المؤثر الخطي الذي ينقل المجموعات المحدودة في $D(T)$ إلى مجموعات محدودة في $R(T)$.

• **نظيم المؤثر T:** اذا كان $T: D(T) \subseteq X \longrightarrow R(T) \subseteq Y$ مؤثر خطي محدود عندئذٍ فإنّ العلاقة التالية محققة:

① $\|Tx\| \leq c.\|x\|$; $c>0$ & $c \in \mathbb{R}$ & $\forall x \in D(T)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ندعو أصغر الأعداد الموجبة c والتي تحقق المتراجحة ① بنظيم المؤثر T ونرمز له بالرمز $\|T\|$.

• كيفية حساب $\|T\|$: حساب $\|T\|$ نظيم المؤثر الخطي والمحدود T بتقسيم طرفي العلاقة ① على $\|x\|$ حيث $x \neq 0$ نجد أن:

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c \quad ②$$

نلاحظ من المتراجحة الأخيرة ② أن الثوابت c أو أي ثابت منها يجب أن يقل عن الحد الأعلى للطرف الأيسر من المتراجحة ② عندما x تمسح جميع عناصر المجموعة $X-\{0\}$ (أو $D(T)-\{0\}$) وأن أصغر تلك الثوابت قيمة والتي يأخذها الثابت c والتي تحقق المتراجحة ② والذي هو من جهة أولى الحد الأعلى الأصغري للطرف الأيسر من هذه المتراجحة ② ومن جهة أخرى هو نظيم المؤثر T أي $\|T\|$ وبالتالي:

$$\|T\| = \sup_{x \in X-\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad Ⅰ$$

هنالك علاقة أخرى يعطى من خلالها $\|T\|$ وهي عندما $\|x\|=1$ بالتعويض في العلاقة Ⅰ نجد أن

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X-\{0\} \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \quad Ⅱ$$

نرمز لمجموعة جميع المؤثرات الخطية المحدودة والمعرفة على X والتي تأخذ قيمها في Y بالرمز $B(X,Y)$.

تمرين: تحقق من أنه إذا كان:

$T: D(T) \subseteq X \to Y$ مؤثراً خطياً محدوداً فإن نظيمه

$\|\ \| : B(X,Y) \to R^+$

والمعرف بإحدى العلاقتين

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أو $\|T\| = \sup_{x \in X-\{0\}} \|Tx\|$ هي نظيم على $B(X,Y)$

أي أنّ $\|\ \|$ تحقّق شروط النظيم $\|x\|=1$

محلّ بالعمل.

• مبرهنة البُعد المنتهي: اذا كان X فضاء منظم منتهي البعد فإنّ كل مؤثر خطي معرف على X يكون محدود.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z