كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : التاسعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التراص والبعد المتري:

تعريف التراص: نقول عن الفضاء المنظم (المتري) $(X, \|\cdot\|)$ أنّهُ فضاء متراص إذا هَوَتْ كلّ متتالية في X متتالية جزئية متقاربة إلى نقطة في X، أو إذا كانَ بالإمكان من كل متتالية من نقط الفضاء X استخراج متتالية جزئية متقاربة إلى نقطة في X.

- نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية M من الفضاء (المتري المنظم) أنّها متراصة إذا هوت كل متتالية من المجموعة M متتالية جزئية متقاربة إلى نقطة في M أو إذا كانَ بالإمكان من كل متتالية من نقط المجموعة M استخراج متتالية جزئية متقاربة إلى نقطة في M.

نتيجة: للحكم على فضاء منظم أو متري أنّهُ غير متراص يكفي إيجاد متتالية واحدة على الأقل من نقط هذا الفضاء بحيث لا يمكننا استخراج أيّة متتالية جزئية متقاربة إلى نقطة في هذا الفضاء.

مثال: الفضاء $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ هو فضاء منظم متري ولكنّهُ غير متراص لأنّ المتتالية التي حدّها العام $x_n = n$ من نقط الفضاء $\mathbb{R}$ من أجل $n = 1, 2, \ldots$ لا يمكننا استخراج أيّة متتالية جزئية من نقاطها متقاربة في $\mathbb{R}$.

توطئة التراص: كل مجموعة جزئية متراصة M في أي فضاء (منظم أو متري) X، تكون مغلقة ومحدودة.

البرهان:

الفرض: X فضاء منظم (متري) و $M \subseteq X$ متراصة في X

المطلب: أ- M مجموعة مغلقة في X

ب- M مجموعة محدودة في X

برهان (أ): برهان أنّ M مغلقة في X:

حتى نبرهن أنّ M مغلقة يجب أن نبرهن أنّ $\bar{M} = M$.

بما أنّ $M \subseteq \bar{M}$ ① محققة دوماً، وبالتالي يكفي أن نبرهن أنّ $\bar{M} \subseteq M$:

$\forall x \in \bar{M}$ وبالتالي حسب برهنة (الملاصقة - المجموعة المغلقة)

البند أولاً: يوجد متتالية $(X_n)_{n\geq 1}$ من نقط المجموعة M بحيث يكون $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ وبما أنّ M متراصة وبالتالي جميع المتتاليات الجزئية في المتتالية $(X_n)_{n\geq 1}$ تكون متقاربة نحو نفس النهاية وهي x وبالتالي $x \in M$

$\Rightarrow \bar{M} \subseteq M$ ②

من ① و ② نجد أنّ $M = \bar{M}$ و M مغلقة في X

برهان (ب): برهان أنّ M محدودة في X:

لنفرض جدلاً أنّ المجموعة M غير محدودة وبالتالي يوجد في M متتالية واحدة على الأقل وهي $(X_n)_{n\geq 1}$ غير محدودة بحيث يكون: $d(X_n, b) > c$ أو $\|X_n - b\| > c$

من أجل b عنصر مثبت من M و $n \in \mathbb{N}$ حيث c عدد ثابت موجب $c > 0$

وبالتالي لا يمكن استخراج أية متتالية جزئية متقاربة من هذه المتتالية لأنّ هذه المتتالية الجزئية لو تقاربت ستكون محدودة وكلّ

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المتتاليات الجزئية في (X_n) غير محدودة حسب ما فرضنا ولكن هذا يناقض الفرض أن M مجموعة متراصة وبالتالي الفرض خاطئ و M محدودة

• نتيجة للتأكيد: وجدنا من التوطئة السابقة أنّ كل مجموعة متراصة في فضاء منظم (متري) تكون مغلقة ومحدودة ولكن عكس التوطئة السابقة غير صحيح في الحالة العامة أي ليست كل مجموعة مغلقة ومحدودة في أي فضاء منظم (متري) متراصة في الحالة العامة

• مثال للاطلاع (غير مطلوب)

$M = \{x \in l^2 \ ; \ \|x\| = 1\}$ مجموعة جزئية من الفضاء l^2 وهي مغلقة ومحدودة لكنّها غير متراصة في الفضاء l^2

مبرهنة التراص الشرط اللازم والكافي حتى تكون مجموعة جزئية M من فضاء منظم متري البعد $(X, \|\cdot\|)$ متراصة هو أن تكون M مغلقة ومحدودة.

البرهان:

لزوم الشرط: الفرض: $M \subseteq X$ و X فضاء منظم متري البعد و M متراصة في X

الطلب: M مغلقة ومحدودة.

البرهان محقق حسب توطئة التراص ... أو نكتب:

بما أنّ X فضاء منظم و M مجموعة متراصة في X بالتالي حسب توطئة التراص فهي مغلقة ومحدودة

كفاية الشرط: الفرض X فضاء منظم متري البعد و M مجموعة جزئية من X و M مجموعة مغلقة ومحدودة في X

الطلب: M مجموعة متراصة في X ... البرهان غير مطلوب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة ونتيجة هامة :

في الفضاءات المنظمة المنتهية البُعد فإنّ المجموعات الجزئية المتراصة هي بالضبط المجموعات الجزئية المغلقة والمحدودة في تلك الفضاءات.

ويكن : هذه الخاصة لا تصحّ من أجل الفضاءات المنظمة غير المنتهية البُعد والفضاءات غير المنظمة.

$M \subset X$ و X فضاء منظم منتهي البُعد

M متراصة $\Leftrightarrow$ M مغلقة ومحدودة

مثال : 1 - المجال $[a,b]$ من الفضاء المنظم $\mathbb{R}$ هي مجموعة متراصة لأنّها مجموعة مغلقة ومحدودة في الفضاء المنظم منتهي البُعد $\mathbb{R}$.

2 - المجال $]a,b[$ من الفضاء المنظم منتهي البُعد $\mathbb{R}$ هي مجموعة غير متراصة لأنّ $]a,b[$ مجموعة محدودة لكنّها غير مغلقة في $\mathbb{R}$.

■ المؤثرات الخطية :

درسنا في التحليل الحقيقي الدوال الحقيقية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية (الفضاء الحقيقي). اليوم ندرس الدوال المعرفة على فضاءات أعمّ مثل الفضاءات المنظمة والخطية والمنظمة وندعو الدوال (التطبيقات) في حالة الفضاءات المنظمة (الخطية) عموماً مؤثرات.

تعريف المؤثر : ليكن X و Y فضاءين خطيين (منظمين) ندعو كل تطبيق معرّف بالشكل التالي

$$\begin{cases} T : X \longrightarrow Y \\ x \longrightarrow Tx \\ y = Tx \end{cases}$$

y صورة العنصر x من X وفق المؤثر T.

مؤثراً من X إلى Y واختصاراً T مؤثر. ويرمز لمجموعة المؤثر (منظمة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف) بالرمز $D(T)$. ونرمز لمدى المؤثر T (مجموعة قيمه مستقرّه) بالرمز $R(T)$.

بعض الملاحظات :

أ- يجب أن يكون الفضائين الخطيين X و Y معرفين فوق نفس الحقل أي إمّا X و Y عقديان معاً أو حقيقيان معاً .

ب- $D(T) \subseteq X$ ليس من الضروري أن تكون تساوي إلى X بالكل وبما أنّ T مؤثر إذاً $D(T)$ يجب أن يكون فضاء خطي ولذلك نفرض دوماً أنّ $D(T)$ فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي X .

ج- $R(T) = \{ y \in Y ; y = Tx \ \& \ x \in D(T) \}$ مدى المؤثر T حيث $R(T) \subseteq Y$ أيضاً يجب أن يكون فضاء خطي جزئي (منظم جزئي) من الفضاء الخطي (المنظم) Y وهو معرّف فوق نفس الحقل المعرف عليه $D(T)$

أي أنّ :

$R(T)$ و $D(T)$ فضاءات خطيان جزئيان من الفضاءات الخطيان X و Y اللذان يقعان فيهما وهما معرّفان فوق نفس الحقل K

د- للتذكير والتأكيد :

$$T : D(T) \subseteq X \longrightarrow R(T) \subseteq Y$$

مؤثر حيث X و Y فضاءات خطيان (منظمان) معرّفان فوق نفس الحقل و $D(T)$ و $R(T)$ فضاءات خطيان جزئيان وعلى التوالي من X و Y معرّفان فوق نفس الحقل K

هـ- ندعو المؤثر T غامراً إذا تحقّق الشرط التالي :

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \ ; \ y = Tx$$

أو إذا كان $y = R(T)$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

و - نقول المؤثر T متبايناً إذا تحقق أحد الشرطين:

1- $T_{x_1} = T_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X$

2- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow T_{x_1} \neq T_{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in X$

ي - نقول المؤثرين T_1 و T_2 مؤثران متساويان أي $T_1 = T_2$ إذا كان لهما نفس الساحة ونفس المدى ونفس قاعدة الربط.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z