كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الثامنة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الفضاءات المنظّمة منتهية البُعد:

تعريف الفضاء المنظم منتهي البُعد: هوَ فضاء خطي مزوّد بنظيم ولهُ قاعدة عدد عناصرها منتهٍ ويمكن تمثيل أي عنصر من عناصر هذا الفضاء بدلالة عناصر القاعدة.

مثال: الفضاء $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{C}^n$ هي فضاءات منظمة منتهية البُعد

الفضاء $\mathbb{R}^n$ فضاء منظم وبعده هو n أي: $\dim \mathbb{R}^n = n < \infty$ وقاعدته القانونية (النظامية) هي:

$$E = \{e_1 = (1,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,\dots,0),\ \dots,\ e_n = (0,0,\dots,0,1)\}$$

وأي عنصر x من $\mathbb{R}^n$ يكتب على شكل تركيب خطي وحيد بدلالة عناصر القاعدة E أي:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n ;\ x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad ;\ \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$i = 1, \dots, n$$

توطئة التراكيب الخطية:

لتكن $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطياً من المتجهات من فضاء منظم X (أياً كان بعده) عندئذٍ يوجد ثابت موجب c بحيث تتحقق المتراجحة التالية من أجل:

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c\,(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|)$$

أو بالشكل:

$$\forall \alpha_i \in K \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad ; \quad \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\| \geq c \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

برهنة التمام كل فضاء جزئي منظم منتهي البعد Y من فضاء منظم X هوَ

فضاء تام وبشكل خاص نقول كل فضاء منظم منتهي البُعد هو تام

البرهان:

الفرض: Y فضاء منظم منتهي البُعد

الطلب Y فضاء تام

حتى نبرهن أنّ Y هو فضاء تام نأخذ متتالية كيفية كوشي ولتكن $(y^{(m)})_{m\geq 1}$ من نقط الفضاء Y ولنبرهن أنّها متقاربة في هذا الفضاء

بما أنّ Y فضاء منظم منتهي البعد وبفرض $\dim Y = n < \infty$

و $y^{(m)} \in Y$ قاعدة لهذا الفضاء عندئذٍ بما أنّ $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ من أجل $m = 1, 2, \dots$ وبالتالي هي تكتب على شكل تركيب خطي:

$$y^{(m)} = \alpha_1^{(m)} e_1 + \alpha_2^{(m)} e_2 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} \cdot e_i \quad ; \quad \alpha_i^{(m)} \in K$$

$i = 1, 2, \dots, n$

وبما أنّ $(y^{(m)})_{m\geq 1}$ كوشي في الفضاء Y وبالتالي فهي تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; \forall m, r \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|y^{(m)} - y^{(r)}\| < \varepsilon$$

لدينا:

$$\varepsilon > \|y^{(m)} - y^{(r)}\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}) e_i \right\| \geq c \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}|$$

وذلك: $\forall \alpha_i \in K \; ; \; i = 1, 2, \dots, n \;\; \& \;\; \forall m, r \geq N(\varepsilon)$

$c > 0$

أصبح لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c} \quad ; \quad \forall m, r \geq N(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c} \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad \forall m, r \geq N(\varepsilon)$$

وبالتالي الشرط التالي محقّق:

$$\forall \varepsilon > 0 \; , \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; \forall m, r \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث $i=1,2,\dots,n$ أي أنّ جميع المتتاليات العددية:

$$(\alpha_i^{(m)})_{m\geq 1} = \{\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \dots, \alpha_i^{(m)}, \dots\}$$

من أجل $i=1,2,\dots,n$ هي متتاليات لكوشي إمّا في الفضاء $\mathbb{R}$ أو الفضاء $\mathbb{C}$ وبالتالي فهي متتاليات عددية متقاربة في هذا الفضاء (لأنّ $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ فضاءات تامة).

ونفرض أنّ $\alpha_i^{(m)} \longrightarrow \alpha_i$ من أجل $i=1,2,\dots,n$ وبتشكيل العنصر y بالشكل:

$$y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

نلاحظ من شكل العنصر y أنّ $y \in Y$ (لأنّ y يكتب على شكل تركيب خطي لعناصر القاعدة في Y).

بقي علينا أن نبرهن أنّ $y^{(m)} \to y$ لدينا:

$$\circledast \quad 0 \leq \|y^{(m)} - y\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i)\, e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i| \cdot \|e_i\|$$

حيث:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i) e_i\right\| \leq \|(\alpha_1^{(m)} - \alpha_1) e_1\| + \dots + \|(\alpha_n^{(m)} - \alpha_n) e_n\|$$

$$\leq |\alpha_1^{(m)} - \alpha_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |\alpha_n^{(m)} - \alpha_n| \cdot \|e_n\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i| \cdot \|e_i\|$$

وبأخذ النهاية في أطراف المتراجحة $\circledast$ نجد أنّ

$$\|y^{(m)} - y\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \Longrightarrow y^{(m)} \to y$$

وبما أنّ $(y^{(m)})_{m\geq 1}$ متتالية كيفية لكوشي من نقط الفضاء Y وهي متقاربة فيه وبالتالي Y فضاء تام.

نتيجة برهنة الانغلاق:

كل فضاء جزئي منظم متري البعد Y من فضاء منظم X يكون مغلقاً في X (لماذا؟).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

النظائم المتكافئة:

إذا كان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ نظيمان على الفضاء الخطي X نقول إنّ $\|\cdot\|$ مكافئ لـ $\|\cdot\|_0$ ونكتب $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_0$

أي:

$\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ نظيمان متكافئان إذا وُجِدَ عددان موجبان a و b بحيث يحقّق الشرط التالي: $\forall x \in X \; ; \; a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$

وإذا وُجِدَ نقطة واحدة x على الأقل في X لا يتحقّق عندها المتراجحة السابقة (الشرط السابق) قُلنا إنّ النظيمين غير متكافئين

ملاحظة: نقول عن النظيمين $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ المعرفان على فضاء خطي منظم X أنّهما غير متكافئان إذا وُجدت نقطة واحدة على الأقل x في X لا يحقق الشرط التالي:

$\forall a, b > 0$ و $a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$

برهنة النظائم المتكافئة:

كل نظيم $\|\cdot\|$ على فضاء خطي منتهي البعد X يكافئ أي نظيم آخر معرّف على X بمعنى (كل نظيم على فضاء خطي منتهي البعد يكون متكافئ مع أي نظيم على هذا الفضاء)

الفرض: X فضاء منتهي البعد و $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ نظيمان على X

الطلب: $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_0$ (نظيمان متكافئان)

حتّى نبرهن أنّ $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ نظيمان متكافئان يجب أن نبرهن أنّ

$\forall x \in X \quad \exists a, b > 0 \; ; \; a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$

بفرض $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدة للفضاء الخطي X لأنّ X منتهي البُعد $\dim X = n < \infty$

عندئذٍ: $\forall x \in X \; ; \; x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بحيث $\forall \alpha_i \in K$; $i = 1, 2, \dots, n$

حسب توطئة التراكيب الخطية:

$$\exists c_1 > 0 \; ; \; \|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| \geq c_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{c_1} \cdot \|x\| \geq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} \quad \dots (1)$$

$$\exists c_2 > 0 \; ; \; \|x\|_0 = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|_0 \geq c_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{c_2} \cdot \|x\|_0 \geq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} \quad \dots (2)$$

وبالاعتماد على متراجحة المثلث وخواص النظيم نجد أنّ:

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|e_i\| \leq k \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$$; \; k = \max\{\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_n\|\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{k} \cdot \|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} \quad (3)$$

$$\|x\|_0 = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|_0 \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|e_i\|_0 \leq k' \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$$; \; k' = \max\{\|e_1\|_0, \dots, \|e_n\|_0\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{k'} \cdot \|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} \quad (4)$$

بالمقارنة بين المتراجحتين ① و ④ نجد:

$$\frac{1}{k'} \cdot \|x\|_0 \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \frac{1}{c'} \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{c_1}{k'} \cdot \|x\|_0 \leq \|x\| \Rightarrow \boxed{a\|x\|_0 \leq \|x\|} \quad (5)$$

$$; \; a = \frac{c_1}{k'} > 0$$

بمقارنة المتراجحتين ② و ③

$$\frac{1}{k} \|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \frac{1}{c_2} \cdot \|x\|_0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\|x\| \leq \frac{K}{c_2} \cdot \|x\|_0 \Rightarrow \boxed{\|x\| \leq b\,\|x\|_0}$ (6) ; $b = \frac{K}{c_2} > 0$

وبمقارنة (5) و (6) نجد أن:

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

والنظيمان $\|\ \|$ و $\|\ \|_0$ متكافئان

انتهت المحاضرة

مكتبة A to Z