كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : السابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف: ندعو المسافة الواردة في النظرية السّابقة - من المحاضرة السّابقة - (كل فضاء منظم هو فضاء متري مسافته تعطى بالعلاقة $d(x,y) = \|x-y\|$) بالمسافة المولدة عن النّظيم.

- وهنا من محاضرة سابقة أنّ كل فضاء منظم X هو فضاء متري ويكن عكس ذلك ليس صحيح في الحالة العامة أي ليس كل فضاء متري هو فضاء منظم وذلك وفقاً لنظرية (توطئة) لا تغيّر في الانسحاب.

- **توطئة لا تغيّر في الانسحاب:**

كل مسافة مولدة عن نظيم معرّف على فضاء منظم X يجب أن يحقّق الخاصيتين التاليتين:

1- $d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad ; \forall x,y,z \in X$

2- $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| . d(x,y) \quad ; \forall \alpha \in K \wedge \forall x,y \in X$

حيث K الحقل المعرّف عليه الفضاء المنظم

البرهان:

1- $d(x+z, y+z) = \|x+z-(y+z)\| = \|x+z-y-z\|$
$= \|x-y\| = d(x,y) \quad ; \forall x,y,z \in X$

2- $\forall \alpha \in K \wedge x,y \in X$
$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\| = |\alpha| \, \|x-y\|$
$= |\alpha| \, d(x,y)$

■ نتيجة هامة في التطبيقات العملية:

1- إنّ التوطئة السابقة تفيدنا بإثبات أنّه ليس كل فضاء متري هو فضاء منظم ومسافته ليست مولدة من نظيم.

2- كل فضاء متري لا يحقّق إحدى الخاصتين السابقتين الواردتين في التوطئة السّابقة مباشرة نقول أنّه ليس فضاءً منظماً.

مثال: هل الفضاء المتري المتقطع هو فضاء منظم أو هل مسافته مولدة من نظيم؟

$X \neq \phi$ حيث d معرفة بالشكل:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = y \\ 1 & ; \quad x \neq y \end{cases} \qquad \forall x,y \in X$$

حتى نثبت أنّ d مولدة من نظيم يجب أن تحقّق خاصتي لا تغيّر في الانسحاب:

① $d(x+z, y+z) = 1 = d(x,y)$

$x \neq y$ أي عندما $\Rightarrow x+z \neq y+z$

$d(x+z, y+z) = 0 = d(x,y)$

$x = y$ أي عندما $\Rightarrow x+z = y+z$

والخاصة الأولى محقّقة للمسافة d

② نتحقّق أنّ d يحقّق الخاصة الثانية. من أجل ذلك نأخذ $\alpha = 7$

عندئذٍ نجد أنّه من أجل $x \neq y$

$$d(\alpha x + \alpha y) = d(7x, 7y) = 1$$

بينما $|\alpha| \cdot d(x,y) = |7| \cdot d(x,y) = 7 \times 1 = 7$

أي أنّه بشكل عام فإنّ $d(\alpha x, \alpha y) \neq |\alpha| \, d(x,y)$

وبالتالي: d لا تحقّق خاصة توطئة لا تغير في الانسحاب الثانية

وبالتالي d مسافة غير مولدة من نظيم والفضاء المتري المتقطع ليس

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فضاءً منظماً.

ملاحظة: كل فضاء لا يشكك فضاءً خطياً ... مباشرةً نقول أنّه ليس فضاءً منظماً.

- من العلاقة: $d(x,o) = \|x-o\| = \|x\|$ استنتج النظيم المعرّف على $\mathbb{R}^n$ ، l^p ، $c[a,b]$ ، $B(A)$.

الحل:

1- $\mathbb{R}^n$:

① $d(x,o) = \|x-o\| = \|x\|$

② $d(x,o) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - o_i)^2} =$ ومن جهة أخرى لدينا: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ و $\forall x = (x_1, \dots, x_n)$ & $o = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$\xRightarrow{\text{من ① و ②}} d(x,o) = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

2- l^p:

① $d(x,o) = \|x-o\| = \|x\|$

② $d(x,o) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - o)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$\forall x = (\xi_i)_{i\geq 1} \in l^p \quad o = (o_i)_{i\geq 1} \in l^p$

$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$ & $p \geq 1$

مما سبق نجد أنّ $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

وبنفس الطريقة نجد النظيم في $c[a,b]$ و $B(A)$ و l^∞.

- تعريف فضاءات بانـاخ:

نقول عن الفضاء المنظم X أنّه فضاء بانـاخ إذا كانت كل متتالية كوشي في هذا الفضاء متقاربة فيه أي أنّه فضاء تام بالنسبة للنظيم المعرف عليه.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: الفضاء الاقليدي المنظم $\mathbb{R}^n$ هو فضاء تام من تمرين سابق

■ لبرهان أنّ فضاء منظم هو فضاء باناخ نتبع الخطوات التالية:

1- نأخذ متتالية كيفية لكوشي من نقط الفضاء المنظم X ولتكن $(X_m)_{m\geq 1}$

2- نشكل العنصر x بحيث نبرهن:

أنّ $x \in X$ وأنّ $X_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x$

■ الفضاء الجزئي المنظم:

ليكن X فضاءً منظماً ندعو المجموعة الجزئية $Y \subset X$ و $Y \neq \emptyset$ فضاءً جزئياً منظماً إذا تحقق الشرطين:

1- Y فضاء خطي جزئي من X باعتبار X فضاء خطي

2- إنّ النظيم المعرف على Y هو مقصور النظيم المعرف على X

ملاحظة هامة: إذا كان Y فضاء جزئي خطي من فضاء باناخ X (فضاء منظم وتام) فيمكن اعتباره فضاء جزئي منظم من الفضاء X على اعتبار أنّ X فضاء منظم مع ملاحظة أنّه ليس من الضروري أن يكون Y فضاء باناخ

والسؤال الذي يطرح نفسه في الحالة العامة:

متى يكون فضاء جزئي منظم Y من فضاء باناخ X هو فضاء باناخ؟

■ بما أنّ الشرط اللازم والكافي حتى يكون فضاءً مترياً جزئياً Y من فضاء متري X ($Y \subset X$ مثلاً) هو أن تكون Y مغلقة في X

وبما أنّ كل فضاء منظم هو فضاء متري وبالتالي نستنتج النظرية التالية:

الشرط اللازم والكافي حتى يكون فضاء جزئي منظم Y من فضاء باناخ X ($Y \subset X$ مثلاً) لباناخ هو أن تكون Y مجموعة مغلقة في X

مثال: الفضاء المنظم الجزئي $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ ليس لباناخ في

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فضاء باناخ وهو $X=(\mathbb{R},|.|)$ لأنّ $Y=]0,1]$ مجموعة غير مغلقة في $\mathbb{R}$.

بينما $([0,1],|.|)$ فضاء جزئي منظم من الفضاء المنظم والتّام لباناخ $X=(\mathbb{R},|.|)$ وهو فضاء لباناخ لأنّ $Y=[0,1]$ مجموعة مغلقة في هذا الفضاء وهو $\mathbb{R}$.

ملاحظة مكررة: بما أنّ كل فضاء منظم هو فضاء متري وبالتالي جميع المفاهيم التبولوجية مثل التقارب ومتتاليات كوشي والمجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة ... الخ تكون صحيحة من أجل الفضاءات المنظمة.

- بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية في الفضاءات المنظمة:

تعريف: المتتالية المتقاربة:

نقول عن المتتالية $(X_n)_{n\geq 1}$ من نقط الفضاء المنظم X أنّها متقاربة إلى نقطة x في الفضاء X أي $\lim_{n\to\infty} X_n = x$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \; ; \; \forall n\geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon \Rightarrow \|x_n-x\|<\varepsilon$$

أي الشرط:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \; ; \; \forall n\geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|x_n-x\|<\varepsilon$$

وهو يدعى تقارب بالنظيم.

- تعريف متتالية كوشي:

نقول عن المتتالية $(X_m)_{m\geq 1}$ من نقط الفضاء المنظم X أنّها لكوشي في هذا الفضاء إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \; ; \; \forall m,r\geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m,x_r)<\varepsilon \Rightarrow \|x_m-x_r\|<\varepsilon$$

- الكرة المغلقة في فضاء منظم X:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نُدعو الكرة التي مركزها x_0 ونصف قطرها r حيث $x_0 \in X$ و $r \geq 0$ والتي هي عبارة عن المجموعة:

$$\bar{B}(x_0, r) = \{ y \in X ; \|y - x_0\| \leq r \}$$

أما المجموعة $B(x_0, r) = \{ y \in X ; \|y - x_0\| < r \}$ بكرة مفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها r في X.

وبنفس الطريقة تُعرّف العشرة الكروية.

- الكرة الواحدية المغلقة نرمز لها بالرمز $B(0,1)$ ونعرّفها بالشكل:

$$B(0,1) = \{ x \in X ; \|x\| \leq 1 \}$$

كرة واحدية مغلقة مركزها الصفر ونصف قطرها الواحد في X.

وبنفس الطريقة نعرّف الكرة الواحدية المفتوحة $B(0,1)$ والعشرة الكروية الواحدية $S(0,1)$.

تمرين: وظيفة:

أسقط شرط التقارب بالنظيم المتتالية ما من فضاء منظم على كل من الفضاءات المنظمة $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}$ ، l^p ، l^∞ ، $c[a,b]$.

ثم أوجد شكل الكرة المغلقة والمفتوحة والعشرة الكروية في كل من الفضاءات السابقة، أيضاً كرّر نفس الطلب السابق من أجل الكرة الواحدية المغلقة والمفتوحة والعشرة الكروية.

- **تعريف القطعة المستقيمة:**

نُدعو مجموعة النقط $M = \{ z \in X ; z = \alpha x + (1-\alpha) y ; 0 \leq \alpha \leq 1 \}$ بقطعة مستقيمة بين النقطتين x و y من الفضاء المنظم X.

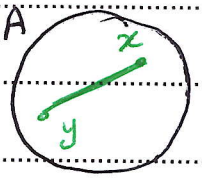
- **تعريف المجموعة المحدّبة:** نُدعو المجموعة الجزئية A من فضاء منظم X

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

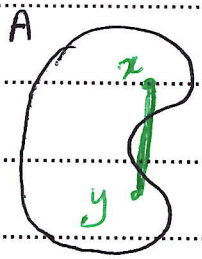
مجموعة جدبة إذا أمكن الوصل بين أي نقطتين من نقط المجموعة A بقطعة مستقيمة محتواة بكاملها في المجموعة A.

مثال:

مجموعة جدبة



ليست مجموعة جدبة



تمرين: • أثبت أن الكرة المغلقة (أو المفتوحة) من فضاء منظم X هي مجموعة جدبة.

• أثبت أن الكرة الواحدية (المغلقة) المفتوحة من فضاء منظم X هي مجموعة جدبة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة