كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : التاسعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مسائل القيم الابتدائية من المرتبة m

(1) $F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}) = 0$: تكتب بالشكل الضمني كالآتي

(2) $y^{(m)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)})$: وتكتب بالشكل الصريح كالآتي

سيتم مع المعادلتين (1) أو (2) m شرطاً ابتدائياً من الشكل:

(3) $y(t_0) = y_0 \;,\; y'(t_0) = y_0' \;,\; \ldots\ldots \;,\; y^{(m-1)}(t_0) = y_0^{(m-1)}$

تدعى المسألة (2) ـ (3) بـ مسألة القيمة الابتدائية بن المعادلة التفاضلية من المرتبة m حيث $t \in [t_0, b]$

تعريف: نقول إن الدالة $y(t)$ حلاً وحيداً للمسألة (2) ـ (3) إذا حققت هذا الحل المسألة (2) والشروط الابتدائية (3)

مثال

$$* \begin{cases} y'' + y' - y = e^t \\ y(0) = 1 \;,\; y'(0) = 1 \end{cases}$$

إن $y(t) = e^t$ هو حل هذه المسألة لأنه يحقق المعادلة التفاضلية:

$y'(t) = e^t = y''(t)$

$e^t + e^t - e^t = e^t$ محققة

الشرطان الابتدائيان محققان $y(0) = 1 \;,\; y'(0) = 1$

تحويل المسألة (2) ـ (3) إلى جملة معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى مع m شرط ابتدائي

نفرض $y_1 = y$

$y_1' = y_2 \;,\; y_2' = y_3 \;,\; \ldots\ldots \;,\; y_{m-1}' = y_m$

$$y_m = f(t, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m)$$

$$y_1(t_0) = y_0 \;,\; y_2(t_0) = y_0' \;,\; \dots \;,\; y_m(t_0) = y_0^{(m-1)}$$

* لتحول المسألة إلى جملة معادلتين مع شرطين ابتدائيين

مثال: $y'' = -y' + y + e^t = f(t, y, y')$

$$\begin{cases} f_1(t, y_1, y_2) = y_1' = y_2 \\ f_2(t, y_1, y_2) = y_2' = -y_2 + y_1 + e^t \end{cases}$$

$$y(t_0) = y(0) = y_1(0) = 1$$

$$y'(t_0) = y'(0) = y_2(0) = 1$$

مثال: استخدم طريقة منشور تايلور من المرتبة الثانية لحل المسألة:

$$\begin{cases} y'' + y' + y = \text{Cost} \\ y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1 \end{cases} \quad ; \; t \in [0, 0.1]$$

بخطوة $h = 0.1$، واسبب الخطأ المطلق في الحل $y(t) = \text{Sint}$

الحل: قبل تطبيق الطريقة يجب تخفيض مرتبة المسألة وتحويلها إلى جملة معادلتين كلٌ منهما من المرتبة الأولى

بفرض أن $z = y'$

$$f_1(t, y, z) = y' = z$$

$$f_2(t, y, z) = z' = -z - y + \text{Cost}$$

أما الشرطان الابتدائيان: $y_0 = y(0) = 0 \;,\; z_0 = z(0) = 1$

بتطبيق الطريقة:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_1'(t_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

$$f_1'(t, y, z) = z' = -z - y + \text{Cost}$$

$$f_2'(t, y, z) = -z' - y' - \text{Sint}$$

$$= (z + y - \text{Cost}) - (z) - \text{Sint} = y - \text{Cost} - \text{Sint}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y_1 = y_0 + h z_0 + \frac{h^2}{2}(-y_0 - z_0 + \cos t_0) = 0 + 0.1(1) + \frac{(0.1)^2}{2}$

$y_1 = 0.1$

$z_1 = z_0 + h(-z_0 - y_0 - \cos t_0) + \frac{h^2}{2}(y_0 - \cos t_0 - \sin t_0)$

$z_1 = 0.995$

$(y_1, z_1) = (0.1, 0.995)$ الحل هو $n = \frac{0.1-0}{0.1} = 1$

و $t_1 = t_0 + h = 0.1$

$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)| = |0.1 - \sin(0.1)| \simeq 1.665E-4$

$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)| = |0.995 - \cos(0.1)| \simeq 4.165E-6$

مثال: استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل المسألة:

$$\begin{cases} y'' + y' - y = e^t \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1 \end{cases} ; \ t \in [0,1]$$

بخطوة $h = 0.1$ ، واحسب الخطأ المطلق في الحل علماً أن الحل التحليلي $y(t) = e^t$.

الحل

$n = \frac{1-0}{0.1} = 10$

أي المطلوب حساب: $y_1, \dots, y_{10}$ ، $\delta y_1, \dots, \delta y_{10}$

نفرض: $z = y'$

$f_1(t, y, z) = y' = z$

$f_2(t, y, z) = y'' = z' = -z + y + e^t$

أما الشرطان الابتدائيان: $y(0) = 1$ ، $z(0) = 1$

لنحسب الحل العددي y_1 عند $t_1 = t_0 + h = 0.1$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$ ، $z_1 = z_0 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2]$

$K_1 = h f_1(t_0, y_0, z_0) = h z_0 = 0.1$

$L_1 = h f_2(t_0, y_0, z_0) = h(-z_0 + y_0 + e^0) = 0.1$

$K_2 = h f_1(t_0+h, y_0+k_1, z_0+L_1)$

$= h\left[(y_0+k_1) - (z_0+L_1) + e^{t_0+h}\right] = 0.110517$

$y_1 = 1 + \frac{1}{2}[0.1 + 0.11] = 1.105$

$z_1 = 1 + \frac{1}{2}[0.1 + 0.110517] = 1.105526$

الخطأ المطلق من الحل العددي y_1 عند $t_1 = 0.1$

$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)| = |1.105 - e^{0.1}| = 1.709E-4$

نتابع بالأسلوب ذاته لإيجاد بقية الحلول.

مثال: استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة لحل مسألة القيم الابتدائية:

$$\begin{cases} y'' - y' - y + e^{t-1} = 0 \\ y(1) = 1 \ , \ y'(1) = 1 \ ; \ t \in [1, 1.5] \end{cases}$$

بخطوة $h = 0.1$، واحسب الخطأ المطلق في الحل علماً أن: $y(t) = e^{t-1}$

الحل:

$$n = \frac{1.5 - 1}{0.1} = 5$$

ويكون المطلوب حساب: $y_1, \dots, y_5 \ , \ \delta y_1, \dots, \delta y_5$

نفرض $y' = z$:

$f_1(t, y, z) = y' = z$

$f_2(t, y, z) = y'' = z' = z + y - e^{t-1}$

$y(1) = 1 \ , \ z(1) = 1$

نحسب الحل العددي الأول عند $t_1 = t_0 + h = 1.1$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$

$z_1 = z_0 + \frac{1}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4]$

$K_1 = h f_1(t_0, y_0, z_0) = h z_0 = 0.1$

$L_1 = h f_2(t_0, y_0, z_0) = h(z_0 + y_0 - e^{t_0-1}) = 0.1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$K_2 = h f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right) = h\left(z_0 + \frac{L_1}{2}\right) = 0.105$$

$$L_2 = h f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right) = 0.104873$$

$$K_3 = h f_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}\right) = 0.1052436$$

$$L_3 = h f_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}\right) = 0.1053665$$

$$K_4 = h f_1(t_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + L_3) = 0.1105439$$

$$\begin{cases} y_1 = 1.1051706 \\ z_1 = 1.1051704\,8 \end{cases}$$

$\delta y_1 = |y_1 - e^{t_1 - 1}| = 3.1807E-7$ تابع بنفس الأسلوب

مسائل القيم الحدية

يعطى الشكل العام لهذه المسألة كالآتي:

$$\begin{cases} (1)\ y'' = f(t, y, y') \\ (2)\ y(a) = \alpha\ ,\ y(b) = \beta \quad ; t \in [a, b] \end{cases}$$

تدعى مسألة القيم الحدية لأن الحل معلوم عند طرفي المجال وهو ما يدعى بالشروط الحدية

يكون للمسألة (2) (1) حلاً وحيداً $y(t)$ إن وجد إذا حققت هذا الحل المعادلة التفاضلية (1) مع الشروط الحدية (2)

برهنة لتكن لدينا المنطقة:

$$D = \{(t, y, y') \mid a \le t \le b\ ,\ -\infty < y < +\infty\ ,\ -\infty < y' < +\infty\}$$

يكون للمسألة (2) (1) حلاً وحيداً وهو $y(t)$ إذا حققت:

① $\forall (t, y, y') \in D$; $f(t, y, y')$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y'}$ مستمرة

② $\forall (t, y, y') \in D$; $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$

③ $\exists M \in \mathbb{R}$; $\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| < M$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نميز حالتين:

الحالة الأولى: وهي الحالة العامة، إذا كانت الدالة f غير خطية في y و y'.

الحالة الثانية: عندما تكون الدالة f خطية عندئذ تكون مسألة القيمة الحدية من الشكل:

$$\begin{cases} y'' - p(t)y' + q(t)y + r(t) & (3) \\ y(a) = \alpha \ , \ y(b) = \beta & (4) \end{cases}$$

سنركز على إيجاد الحلول العددية للحالة الخطية أولاً.

مثال

$$\begin{cases} y'' + e^{-ty} + \sin y' = 0 \\ y(1) = y(2) = 0 \quad ; t \in [1,2] \end{cases}$$

أثبت وجود حل وحيد:

الحل

$y'' = -e^{-ty} - \sin y' = f(t, y, y')$ مستمرة على D

$\frac{\partial f}{\partial y} = te^{-ty} > 0$ مستمرة على D ; $1 \le t \le 2$

$\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| = |-\cos y'| = \cos y' < 1$ مستمرة على D

يوجد طرائق خاصة لحل مسائل القيم الحدية أشهرها:

طريقة القذيفة Shooting

تحول هذه الطريقة مسألتنا إلى مسألتين من مسائل القيم الابتدائية

بفرض أن $w(t)$ هو الحل الوحيد للمسألة الأولى

و $z(t)$ هو الحل الوحيد للمسألة الثانية

$$\begin{cases} w'' = p(t)w' + q(t)w + r(t) \\ w(a) = \alpha \ , \ w'(a) = 0 \end{cases}$$ مسألة القيمة الابتدائية الأولى:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{cases} z'' = p(t)z' + q(t)z \\ z(a) = 0 \ , \ z'(a) = 1 \end{cases}$$ مسألة القيمة الابتدائية الثانية (متجانسة)

عندئذ فإن حل المسألة الأساسية (4) ـ (3) هو تركيب خطي لحلي المسألتين مركب خطياً من $w(t)$ و $z(t)$ بالشكل: $y(t) = w(t) + c\,z(t)$ (5)

حيث c ثابت يطلب تعيينه

$$y' = w' + cz'$$

$$y'' = w'' + cz'' = p(t)w' + q(t)w + r(t) + c(p(t)z' + q(t)z)$$

$$y'' = p(t)(w' + cz') + q(t)(w + cz) + r(t) = (3)$$

يجب على $y(t)$ أن تحقق الشروط الحدية:

$y(a) = w(a) + cz(a) = \alpha + c(0) = \alpha$ محققة

$$y(b) = w(b) + cz(b)$$

$$c = \frac{y(b) - w(b)}{z(b)} = \frac{\beta - w(b)}{z(b)}$$

وبالتعويض في (5) نحصل على:

$$y(t) = w(t) + \frac{\beta - w(b)}{z(b)}\, z(t)$$

استراتيجية الحل (خوارزمية الحل)

1. تحويل المسألة ذات القيم الحدية إلى مسألتين من مسائل القيم الابتدائية
2. نطبق الطرائق الأساسية التي مرّت معنا لكل المسألتين حلول المسألة الأولى $w_1, \dots, w_n$ وحلول المسألة الثانية $z_1, \dots, z_n$
3. نحدد الثابت $c = \frac{\beta - w_n}{z_n}$ حيث $b - t_n$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4- $y_i = w_i + c\,z_i = w_i + \frac{\beta - w_n}{z_n} z_i$

حيث $1 \le i \le n$ و $t_i = t_0 + ih$

و n تجزئة المجال حيث $n = \frac{b-a}{h}$

مثال: استخدم طريقة القذيفة مع طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل المسألة:

$$\begin{cases} y'' = y - y' + e^t \\ y(0) = 1 \ , \ y(0.3) = e^{0.3} \end{cases} ; \ t \in [0, 0.3]$$

بخطوة $h = 0.1$، واحسب الخطأ المطلق في الحل العددي علماً أن: $y(t) = e^t$

الحل: نحول مسألة القيم الحدية إلى مسألتين من مسائل القيم الابتدائية:

الأولى:
$$\begin{cases} w'' = w - w' + e^t \\ w(0) = 1 \ , \ w'(0) = 0 \end{cases} ; \ t \in [0, 0.3]$$

الثانية:
$$\begin{cases} z'' = z - z' \\ z(0) = 0 \ , \ z'(0) = 1 \end{cases}$$

$$n = \frac{0.3 - 0}{0.1} = 3$$

حل المسألة الأولى باستخدام رانج كوتا:

$$w' = u = f_1(t, w, u)$$

$$u' = w - u + e^t = f_2(t, w, u)$$

$$w(0) = 1 \ , \ u(0) = 0$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{2}[L_1 + L_2]$$

عندما $i = 0$:

$$w_1 = w_0 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$$

$$u_1 = u_0 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$k_1 = h f_1(t_0, w_0, u_0) = h u_0 = 0$

$L_1 = h f_2(t_0, w_0, u_0) = h(w_0 - u_0 + e^0) = 0.2$

$k_2 = h f_1(t_0 + h, w_0 + k_1, u_0 + L_1) = h(u_0 + L_1) = 0.02$

$L_2 = h f_2(t_0 + h, w_0 + k_1, u_0 + L_1) = 0.190517$

$$\begin{cases} w_1 = 1.01 \\ u_1 = 0.195259 \end{cases}$$

نتابع بنفس الأسلوب من أجل $i = 1$, $i = 2$

عند t_2 $\begin{cases} w_2 = 1.03919 \\ u_2 = 0.38448 \end{cases}$ عند t_3 $\begin{cases} w_3 = 1.08695 \\ u_3 = 0.571012 \end{cases}$

نحل المسألة الثانية باستخدام رانج كوتا:

$z' = v = f_1(t, z, v)$

$z'' = v' = z - v = f_2(t, z, v)$

$z(0) = 0$, $v(0) = 1$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2}[L_1 + L_2]$$

عند $i = 0$:

$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$

$v_1 = v_0 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2]$

$k_1 = h f_1(t_0, z_0, v_0) = h v_0 = 0.1$

$L_1 = h(z_0 - v_0) = -0.1$

$k_2 = h(v_0 + L_1) = 0.1(1 - 0.1) = 0.09$

$L_2 = h((z_0 + k_1) - (v_0 + L_1)) = -0.08$

$$\begin{cases} z_1 = 0.095 \\ v_1 = 0.91 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتابع بذات الأسلوب من أجل $i=1$ و $i=2$

عند $t_2=0.2$:

$$\begin{cases} K_1 = 0.091 \ , \ L_1 = 0.0815 \\ K_2 = 0.08285 \ , \ L_2 = -0.06425 \\ Z_2 = 0.181925 \ , \ v_2 = 0.837125 \end{cases}$$

عند $t_3=0.3$:

$$\begin{cases} K_1 = 0.0837125 \ , \ L_1 = 0.06552 \\ K_2 = 0.07716 \ , \ L_2 = -0.050596 \\ Z_3 = 0.26236 \ , \ v_3 = 0.779067 \end{cases}$$

$$c = \frac{\beta - w_3}{z_3} = \frac{e^{0.3} - 1.08695}{0.26236} = 1.00209$$

$$i=1 \Rightarrow y_1 = w_1 + cz_1 = 1.1052$$

$$i=2 \Rightarrow y_2 = w_2 + cz_2 = 1.22143$$

$$i=3 \Rightarrow y_3 = w_3 + cz_3 = 1.34986$$

$$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)| = |y_1 - e^{0.1}| = 2.737E-5$$

$$\delta y_2 = |y_2 - y(t_2)| = 2.739E-5$$

$$\delta y_3 = |y_3 - e^{0.3}| = 0$$

وظيفة: استخدم طريقة القذيفة وطريقة منشور تايلور من المرتبة الثانية لحل المسألة:

$$\begin{cases} y'' + y' - y = t - t^2 \\ y(0) = 3 \ , \ y(1) = 5 \quad ; t \in [0,1] \end{cases}$$

بخطوة $h=0.2$، واحسب الخطأ المطلق في الحل العددي علماً أن: $y(t) = t^2 + t + 3$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z