كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : الثامنة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مسائل القيم الابتدائية

الحلول العددية لمسائل القيم الابتدائية في جملة المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

* $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

نطلق تسمية مسألة القيمة الابتدائية على المعادلة التفاضلية والشرط الابتدائي ويكون $y(t)$ حلاً للمسألة *

إذا حقق هذا الحل المعادلة التفاضلية والشرط الابتدائي.

قدّمت مجموعة من الطرائق لحل المسألة *

أولر (من المرتبة الأولى)

أولر المعدّلة - هيون (من المرتبة الثانية)

طرائق رانج - كوتا (من المرتبة الثانية والثالثة والرابعة والخامسة)

تدعى هذه الطرائق بـ عائلة طريقة متسلسل تايلور (من المرتبة m)

لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية التالية:

$$(1)\quad \begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad ; \; t \in [t_0, b]$$

مع الشروط الابتدائية: $(2)\quad y_1(t_0) = \alpha_1, \; y_2(t_0) = \alpha_2, \dots, y_n(t_0) = \alpha_n$

تدعى جملة المعادلات (1) مع الشروط الابتدائية (2) بـ مسألة القيم الابتدائية

في جملة المعادلات التفاضلية (1) إن الدوال f_i يمكن أن تكون خطية أو غير خطية في متغيراتها $y_1, y_2, \dots, y_n$ تدعو الدوال $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ حلولاً وحيدة للمسألة (1) ـ (2) إذا حققت هذه الدوال الجملة (1) والشروط الابتدائية (2) معاً.

ملاحظة سنفترض دوماً أن حل مسألة القيم الابتدائية (1) ـ (2) موجود ولكن هذا لا يعني أننا سنستطيع الحصول عليه بالطرق التحليلية أي قد لا نستطيع إيجاد تعابير تحليلية لهذا الحل، ومن هنا تأتي أهمية إيجاد الحل التقريبي لهذا الحل بطرق عددية.

مثال لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية في جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$(1)'\begin{cases} y' = y + z - \sin t \\ z' = z - y - \cos t \end{cases} \quad ; \quad t \in [0, b] \ , \ b > 0$$

$$(2)' \quad y(0) = 0 \ , \ z(0) = 1$$

إن $y(t) = \sin t$ ، $z(t) = \cos t$ حلاً للمسألة لأنه يحقق جملة المعادلتين (1)' ويحقق (2)'

$$y'(t) = \cos t \ , \ z'(t) = -\sin t$$

التحقق: محققة $\cos t = \sin t + \cos t - \sin t$

محققة $-\sin t = \cos t - \sin t - \cos t$

محققة $y(0) = \sin(0) = 0$

محققة $z(0) = \cos(0) = 1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ستقتصر دراستنا على إيجاد الحل العددي لجملة المعادلتين:

$$(3)\begin{cases} y' = f_1(t, y, z) \\ z' = f_2(t, y, z) \end{cases} \quad ; t \in [t_0, b]$$

$$y(t_0) = \alpha_1 \ , \ z(t_0) = \alpha_2$$

سنقوم بتعميم طرائق أولر ومنشور تايلور من المرتبة m وطرائق رانج كوتا من المرتبة الثانية والرابعة لحل مسألة القيم الابتدائية (3)

تعاريف:

مرتبة طريقة عددية: نقول عن طريقة عددية أنها من المرتبة m إذا كان الفرق بين الدالة y وبين الحل التقريبي $\tilde{y}$ يساوي $O(h^m)$

$$y(t) - \tilde{y}(t) = O(h^m)$$

الحل التقريبي سيسعى إلى الحل الدقيق — الحل التقريبي — الحل الدقيق

عندما تتحقق النهاية $\lim_{h \to 0} O(h^m) = 0$

إن هذه الدالة هي دالة الخطأ ستسعى إلى الصفر بسرعة أكبر كلما كانت m أكبر.

ونتذكر أن m هي مرتبة الطريقة ولهذا فإن الطريقة التي تكون فيها $m = 1$ هي أقل دقة من جميع الطرائق التي تعلوها بالمرتبة

نسمي الخطأ: $y(t_i) - \tilde{y}(t_i) = O(h^m)$

ب- الخطأ الموضعي (المحلي) local error — في نقطة معينة t_i من المجال

وهو يقيس الخطأ الحاصل عند الانتقال من t_{i-1} إلى t_i

أما الخطأ الشامل Global error

فهو أكبر الأخطاء على كامل مجال الحل.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف التقارب: نقول عن طريقة عددية تنتج متتالية الحل العددي حلولها $y_1, y_2, \ldots, y_n$ أنها متقاربة إذا تحققت الآتي:

إذا كانت $\lim_{h \to 0} y_i = y(t_i)$ و $i = 1, \ldots, n$

طريقة أويلر لحل المسألة (3)

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

تعتمد الطرائق العددية على تجزئة مجال الحل إلى n مجال جزئي

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

وإذا كانت التجزئة منتظمة سنستطيع الاعتماد على العلاقة

$$t_i = t_0 + ih \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

الخطوة: $h = \frac{b - t_0}{n}$

وبموجب هذه التجزئة المنتظمة سنحصل على الحل العددي بالشكل:

الحل التحليلي $y(t)$ ⟵ $y_1, y_2, \ldots, y_n$

الحل التحليلي $z(t)$ ⟵ $z_1, z_2, \ldots, z_n$

الخطأ المطلق: $\delta_{y_1} = |y_1 - y(t_1)|$

$$\delta_{z_1} = |z_1 - z(t_1)|$$

الحل العددي في الخطوة الأولى عند (y_1, z_1) $t = t_1$

الحل العددي في الخطوة الثانية عند (y_2, z_2) $t = t_2$

الحل العددي في الخطوة الثالثة عند (y_3, z_3) $t = t_3$

⋮

الحل العددي في الخطوة n عند (y_n, z_n) $t = t_n$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية:

$$\begin{cases} y' - y + z = e^t \\ z' + y - z = e^t \end{cases} \quad ; t \in [0, 0.2]$$

$$y(0) = 1 \quad \& \quad z(0) = 1$$

والمطلوب: إيجاد الحل العددي لهذه المسألة بطريقة أولر بخطوة $h = 0.1$ وحساب الخطأ المطلق للحل العددي.

إذا علمت أن: $y(t) = z(t) = e^t$

الحل:

$$h = 0.1 \quad , \quad t_0 = 0 \quad , \quad t_n = b = 0.2$$

$$h = \frac{b - t_0}{n} \Rightarrow n = \frac{b - t_0}{h} = \frac{0.2 - 0}{0.1} = 2$$

أي يكون المطلوب هو إيجاد (y_1, z_1) , (y_2, z_2)

$$y' = y - z + e^t = f_1$$

$$z' = -y + z + e^t = f_2$$

$$y_1 = y_0 + h f_1(t_0, y_0, z_0) = y_0 + h(y_0 - z_0 + e^{t_0})$$

$$= 1 + 0.1(1 - 1 + e^0) = 1.1$$

$$z_1 = z_0 + h f_2(t_0, y_0, z_0) = z_0 + h(-y_0 + z_0 + e^{t_0})$$

$$= 1 + 0.1(-1 + 1 + e^0) = 1.1$$

$$(y_1, z_1) = (1.1, 1.1) \quad ; t_1 = t_0 + h = 0.1$$

$$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)| = |1.1 - e^{t_1}| = 5.1707E-3$$

$$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)| = |1.1 - e^{t_1}| = 5.1707E-3$$

$$y_2 = y_1 + h f_1(t_1, y_1, z_1) = 1.210517$$

$$z_2 = z_1 + h f_2(t_1, y_1, z_1) = 1.210517$$

$$(y_2, z_2) = (1.210517, 1.210517) \quad ; t_2 = t_0 + 2h = 0.2$$

$$\delta y_2 = |y_2 - y(t_2)| = |1.210517 - e^{t_2}| = 1.0885E-2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\delta_{z_2} = |z_2 - z(t_2)| = |1.210517 - e^{t_2}| = 1.08857E-2$

أفضل ما في بداية المجال وأسوؤه في نهاية المجال
لأن الحل يتراكم بدءاً من الشرط الابتدائي.

2 طريقة مفكوك تايلور من المرتبة m لحل المسألة (3)

$$y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_1'(t_i, y_i, z_i) + \dots + \frac{h^m}{m!} f_1^{(m-1)}(t_i, y_i, z_i)$$

$$i = 1, \dots, n-1 \qquad t_0 < t < b$$

$$z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_i, y_i, z_i) + \dots + \frac{h^m}{m!} f_2^{(m-1)}(t_i, y_i, z_i)$$

حالات خاصة:

$m=1$ نحصل على طريقة أويلر من المرتبة الأولى

$m=2$ نحصل على طريقة من المرتبة الثانية مكافئة لـ رانج كوتا من المرتبة الثانية

مثال: استخدم طريقة مفكوك تايلور من المرتبة الثانية لحل المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' - y - z = -\sin t \\ z' + y - z = -\cos t \end{cases} \quad ; t \in [0, 0.2]$$

$$y(0) = 0 \ \& \ z(0) = 1$$

وبخطوة $h = 0.1$ علماً أن $y(t) = \sin t$, $z(t) = \cos t$

واحسب الخطأ المطلق للحل العددي.

الحل: المطلوب إيجاد (y_1, z_1) و (y_2, z_2) , $n = \frac{0.2-0}{0.1} = 2$

$$f_1 = y' = y + z - \sin t$$

$$f_2 = z' = -y + z - \cos t$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y_1 = y_0 + h f_1(t_0, y_0, z_0) + \frac{h^2}{2} f_1'(t_0, y_0, z_0)$$

$$z_1 = z_0 + h f_2(t_0, y_0, z_0) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_0, y_0, z_0)$$

$$f_1' = y'' = y' + z' - \cos t = 2z - \sin t - 2\cos t$$

$$f_2' = z'' = -y' + z' + \sin t = -2y + 2\sin t - \cos t$$

$$y_1 = y_0 + h(y_0 + z_0 - \sin t_0) + \frac{h^2}{2}(+2z_0 - \sin t_0 - 2\cos t_0)$$

$$y_1 = 0.1$$

$$z_1 = z_0 + h(-y_0 + z_0 - \cos t_0) + \frac{h^2}{2}(-2y_0 + 2\sin t_0 - \cos t_0)$$

$$z_1 = 0.995 \quad ; t_1 = t_0 + h = 0.1$$

$$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)| = |0.1 - \sin(0.1)| = 1.6667E-4$$

$$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)| = |0.995 - \cos(0.1)| = 4.1651E-6$$

$$y_2 = y_1 + h(y_1 + z_1 - \cos t_1) + \frac{h^2}{2}(2z_1 - \sin t_1 - 2\cos t_1)$$

$$z_2 = z_1 + h(-y_1 + z_1 - \cos t_1) + \frac{h^2}{2}(-2y_1 + 2\sin t_1 - \cos t_1)$$

$$y_2 = 0.199017$$

$$z_2 = 0.980023 \quad ; t_2 = t_0 + 2h = 0.2$$

$$\delta y_2 = |y_2 - y(t_2)| = |0.199017 - \sin(0.2)| = 3.482E-4$$

$$\delta z_2 = |z_2 - z(t_2)| = |0.980023 - \cos(0.2)| = 4.3681E-5$$

[3] طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل المسألة (3)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{2}[L_1 + L_2] \quad ; i = 0, \ldots, n-1$$

حيث

$$K_1 = h f_1(t_i, y_i, z_i)$$

$$L_1 = h f_2(t_i, y_i, z_i)$$

$$K_2 = h f_1(t_i + h, y_i + K_1, z_i + L_1)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$L_2 = h f_2(t_i + h, y_i + k_1, z_i + L_1)$

الخطأ من هذه الطريقة من الشكل $O(h^2)$

مثال: استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الثانية لحل المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' - y - z = -\sin t \\ z' + y - z = -\cos t \end{cases} ; \quad t \in [0, 0.2]$$

الخطوة $h = 0.1$ ، $y(0) = 0$ & $z(0) = 1$

علماً أن $y(t) = \sin t$ ، $z(t) = \cos t$

واحسب الخطأ المطلق للحل العددي.

الحل: $n = \frac{0.2 - 0}{h} = 2$ ، $f_1 = y' = y + z - \sin t$

$f_2 = z' = -y + z - \cos t$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$

$z_1 = z_0 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2]$

$K_1 = (0.1)(y_0 + z_0 - \sin t_0) = (0.1)(0 + 1 - \sin 0) = 0.1$

$L_1 = (0.1)(-y_0 + z_0 - \cos t_0) = 0$

$K_2 = (0.1)((y_0 + K_1) + (z_0 + L_1) - \sin(t_0 + h))$

$= (0.1)(0.1 + 1 - \sin(0 + 0.1)) = 0.1000167$

$L_2 = (0.1)(-(y_0 + K_1) + (z_0 + L_1) - \cos(t_0 + h)) = -0.0095$

$y_1 = 0.10001$ ، $z_1 = 0.99525$ ، $t_1 = t_0 + h = 0.1$

$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)| = 1.749E-4$

$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)| = 2.456E-4$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$

$z_2 = z_1 + \frac{1}{2}[L_1 + L_2]$

$K_1 = h f_1(t_1, y_1, z_1) = (0.1)(y_1 + z_1 - \sin t_1) = 0.09954$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$L_1 = h f_2(t_1, y_1, z_1) = -0.00976$

$K_2 = h f_1(t_1 + h, y_1 + k_1, z_1 + L_1) = 0.09862$

$L_2 = h f_2(t_1 + h, y_1 + k_1, z_1 + L_1) = -0.0194$

$y_2 = 0.19909 \quad , \quad z_2 = 0.98054 \quad ; t_2 = t_0 + 2h = 0.2$

$\delta y_2 = |y_2 - y(t_2)| = 4.2E-4$

$\delta z_1 = |z_2 - z(t_2)| = 4.8E-4$

4 طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة كل المسألة (3)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4] \quad ; i = 0, \dots, n-1$$

حيث

$K_1 = h f_1(t_i, y_i, z_i)$

$L_1 = h f_2(t_i, y_i, z_i)$

$K_2 = h f_1\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2}\right)$

$L_2 = h f_2\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2}\right)$

$K_3 = h f_1\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2}\right)$

$L_3 = h f_2\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2}\right)$

$K_4 = h f_1(t_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3)$

$L_4 = h f_2(t_i + h, y_i + k_3, z_i + L_4)$

مثال: استخدم طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة كل المسألة:

$$\begin{cases} y' = y - z + t + e^t \\ z' = z - y + e^t - t + 1 \end{cases} \quad ; t \in [0, 0.2]$$

حيث $h = 0.1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$

واحسب الخطأ المطلق من الحل العددي علماً أن:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y(t) = e^t$, $z(t) = e^t + 1$

$n = \frac{0.2 - 0}{0.1} = 2$; $f_1 = y - z + t + e^t$ الحل

$f_2 = z - y + e^t - t + 1$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$

$z_1 = z_0 + \frac{1}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4]$

$k_1 = h f_1(t_0, y_0, z_0) = (0.1)(y_0 - z_0 + t_0 + e^{t_0}) = 0.1$

$L_1 = h f_2(t_0, y_0, z_0) = 0.2$

$k_2 = h f_1(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}) = 0.10513$

$L_2 = 0.20513$

$k_3 = 0.10513$

$L_3 = 0.20513$

$k_4 = 0.11052$

$L_4 = 0.21052$

$y_1 = 1.10517$, $z_1 = 1.20517$

وظيفة : δy_1 , δz_1

والخطوة الثانية

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z