كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : السابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

يمكن إعادة كتابة الجملة $f(t)=1 \; , \; w_1+\dots+w_N=2$

$$\vdots$$

$$f(t)=t^{N-1} \; , \; t_1^{N-1}w_1+\dots+t_N^{N-1}w_N=\frac{[1-(-1)^N]}{N}$$

بشكل مصفوفات كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ \vdots & & & \\ t_1^{N-1} & t_2^{N-1} & \dots & t_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{[1-(-1)^N]}{N} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

حيث $\int_{-1}^{1} t^{N-1}\,dt = \frac{1-(-1)^N}{N}$

وعلينا الآن حساب أصفار غاوس t_i

بحسب t_i الموجودة في مصفوفة الجملة (3) من كثيرة حدود ليجندر $L_N(t)$

ولأجل هذا نعرف كثيرة حدود ليجندر بالصيغة:

$$L_N(t)=\sum_{i=0}^{[\frac{N}{2}]}(-1)^i\frac{(2N-2i)!}{2^N\, i!\,(N-i)!\,(N-2i)!}\,t^{N-2i}$$

حيث $[\frac{N}{2}]$ هو أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي $\frac{N}{2}$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

تعطى الصيغة (4) كثيرات الحدود :

$L_0(t) = 1$

$L_1(t) = t$

$L_2(t) = \frac{1}{2}[3t^2 - 1]$

$L_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t]$

$L_4(t) = \frac{1}{8}[35t^4 - 30t^2 + 3]$

* يمكن حساب t_1 و t_2 (من أجل $N=2$) من $L_2(t)$

$L_2(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[3t^2 - 1] = 0$

$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

* يمكن حساب t_1 و t_2 و t_3 (من أجل $N=3$) من $L_3(t)$

$L_3(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[5t^3 - 3t] = 0$

$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, $t_2 = 0$, $t_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

ملاحظة نحسب هذه الجذور التي هي نقاط غاوس t_i ونعوضها في صيغة الجملة (3) ونحل هذه الجملة فنحصل على المجاهيل $W_1, \dots, W_N$

ولتوضيح الطريقة نأخذ الأمثلة التالية :

مثال استخدم طريقة غاوس ليجندر من أجل نقطتين غاوسيتين لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل : $\int_{-1}^{1} x^2 \cos x \, dx$

الحل

$f(x) = x^2 \cos x$

$S = \sum_{i=1}^{N=2} W_i f(t_i) = W_1 f(t_1) + W_2 f(t_2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوجد t_1 و t_2 من $L_2(t) = 0$ فنجد :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 2 \\ -w_1 + w_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad w_1 = w_2 \Rightarrow 2w_1 = 2 \Rightarrow w_1 = w_2 = 1$$

$S = 1\, f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + 1\, f(\frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 0.558608$ وحدة مربعة

مثال: أعد حل المثال السابق باستخدام ثلاث نقاط غاوسية $N=3$

$f(x) = x^2 \cos x$ الحل

$$S = \sum_{i=1}^{N=3} w_i f(t_i) = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

t_1 و t_2 و t_3 من كثيرة حدود ليجندر $L_3(t) = 0$ نجد

$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, $t_2 = 0$, $t_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

بالحل:

$w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$

$w_2 = \frac{8}{9}$

$S = \frac{5}{9} f(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}) \approx 0.476469$

وحدة مربعة

مثال: أوجد باستخدام ثلاث نقاط غاوسية قيمة التكامل:

$$I = \int_0^1 (2x-1)^2 e^{2x-1}\, dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: نحول المجال من $[1, 0]$ إلى $[1, -1]$ بالشكل:

$$x = \frac{1-0}{2} z + \frac{1+0}{2} = \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dz$$

$$(2x-1)^2 e^{2x-1} = (2(\frac{z}{2}+\frac{1}{2})-1)^2 e^{2(\frac{z}{2}+\frac{1}{2})-1} = z^2 e^z$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} z^2 e^z dz = \int_{-1}^{1} f(z)\, dz$$

$$S = \sum_{i=1}^{N=3} w_i f(t_i) = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

نجد t_1, t_2, t_3 من كثيرة حدود ليجندر $L_3(t) = 0$

$$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

بالحل الجملة: $w_1 = \frac{5}{9}, \quad w_2 = \frac{8}{9}, \quad w_3 = \frac{5}{9}$

$$S = \frac{5}{9} f(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$$

$S \approx 0.43843$ وهذه مرتبة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z