كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : السادسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التكاملات العددية

لقد مرّ معنا في تحليل عددي (1) مجموعة من الطرائق لإيجاد قيمة التكاملات العددية من الشكل:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

من هذه الطرائق: طريقة المستطيلات ـ طريقة أشباه المنحرفات ـ طريقة سيمبسون.

اعتمدت هذه الطرائق على تجزيء مجال التكامل إلى متتالية من المجالات الجزئية من الشكل:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

($x_0 = a$, $x_n = b$)

تحسب النقاط x_i من العلاقة: $x_i = a + ih$

حيث $h = \frac{b-a}{n}$ (طول الخطوة)

ستكون أطوال المجالات الجزئية متساوية وفق هذه التجزئة وطولها يساوي h

① طريقة سيمبسون تميزت هذه الطريقة بأنها استخدمت المجالات الجزئية التالية:

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$$

حيث اشترطت أن n عدد زوجي $n = 2m$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)\,dx$$

$p_1(x)$ ← قربنا بكثيرة حدود — $p_2(x)$ ← — $p_m(x)$ ←

$$= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] + \frac{h}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4] + \cdots + \frac{h}{3}[f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}]$$

$$I \approx S = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{m}[f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}]$$

الخطأ المقطع:

$$E_T(h) = \frac{-(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(c) \quad ; \quad c \in [x_0, x_{2m}] = [a,b]$$
$$= O(h^4)$$

$$E \leq \frac{-(b-a)}{180}h^4 M \quad ; \quad M = \max\{f^{(4)}(a), f^{(4)}(b)\}$$

طرائق سيمبسون

② تكاملات سيمبسون على قاعدة ثلاث مجالات جزئية

ستخدم هذه الطريقة المجالات الجزئية بفرض أن n تقبل القسمة على 3 أو $n = 3m$ أو $n \bmod 3 = 0$

$$[x_0, x_3], [x_3, x_6], [x_6, x_9], \ldots, [x_{3m-3}, x_{3m}]$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{3m-3}}^{x_{3m}} f(x)\,dx$$

$p_1(x)$ ← — $p_2(x)$ ← — $p_m(x)$ ←

إن $p_1(x)$ كثيرة حدود لاغرانج من الدرجة الثالثة التي تقرب الدالة $f(x)$ المعرفة بالنقاط:

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$p_1(x) = \sum_{j=0}^{3} L_j(x) f_j$ فيكون التكامل الأول:

$$\int_{x_0}^{x_3} p_1(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right]$$

$$\int_{x_3}^{x_6} p_2(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f_3 + 3f_4 + 3f_5 + f_6\right]$$

$$\int_{x_{3m-3}}^{x_{3m}} p_m(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f_{3m-3} + 3f_{3m-2} + 3f_{3m-1} + f_{3m}\right]$$

$$I \approx S = \frac{3h}{8}\sum_{i=1}^{m}\left[f_{3i-3} + 3f_{3i-2} + 3f_{3i-1} + f_{3i}\right]$$

حالة الخطأ المقطوع:

$$E_T(h) = \frac{-(b-a)}{80} h^4 f^{(4)}(c) \quad ; \quad c \in [a,b]$$

مثال: استخدم طريقة سيمبسون على ثلاث حالات جزئية لإيجاد قيمة التكامل العددي: $I = \int_1^2 x e^x\,dx$

من أجل $n=3$ واحسب الخطأ المقطوع الأعظمي.

الحل: $n = 3m = 3 \Rightarrow m = 1$, $f(x) = x e^x$

$a = x_0 = 1$, $b = x_3 = 2$, $h = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \approx 0.33333$

$x_i = a + ih$ $\qquad f_0 = f(x_0) = e \approx 2.71828$

$x_1 \approx 1.33333 \Rightarrow f_1 \approx 5.05822$

$x_2 \approx 1.66667 \Rightarrow f_2 \approx 8.82415$

$x_3 = 2 = b \Rightarrow f_3 \approx 14.77810$

$I = \frac{3h}{8}\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right] \approx 7.39294$ وحدة مربعة

$f'(x) = e^x + x e^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = e^x(2+x)$, $f'''(x) = e^x(3+x)$, $f^{(4)}(x) = e^x(4+x)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\max_{c\in[x_0,x_3]=[1,2]} |f^{(4)}(c)| = \max_{x\in[1,2]} |e^x(4+x)| = e^2(4+2) = 6e^2$$

$$E_T(h) \le \frac{2-1}{80}(0.33333)^4(6e^2) \approx 0.0068414$$

وظيفة: أعد المثال حيث $n=6$

③ تكاملات سمبسون على قاعدة أربع مجالات جزئية:

نفرض أن $n=4m$ أي أن $n \bmod 4 = 0$

$$[x_0,x_4],[x_4,x_8],\dots,[x_{4m-4},x_{4m}]$$

$$I = \int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_8} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{4m-4}}^{x_{4m}} f(x)\,dx$$

$p_1(x)$ كثيرة حدود تقرب الدالة $f(x)$ وهي من الدرجة الرابعة

ستكمل الدالة $f(x)$ من الجنس نقاط الواقعة من المجال $[x_0,x_4]$

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{4} L_j(x) f_j$$

فيكون التكامل $\int_{x_0}^{x_4} p_1(x)\,dx$

$$= \frac{2h}{45}[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4]$$

$$I \approx S = \frac{2h}{45}\sum_{i=1}^{m}[7f_{4i-4} + 32f_{4i-3} + 12f_{4i-2} + 32f_{4i-1} + 7f_{4i}]$$

الخطأ المقطوع الأعظمي:

$$E_T(h) = \frac{-2(b-a)}{945}h^6 f^{(6)}(c) = o(h^6)$$

مثال: استخدم طريقة سمبسون على قاعدة أربع مجالات جزئية لحساب قيمة التكامل العددي $\int_1^2 x^2 \ln x\,dx$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

من أجل $n=4$ ثم احسب الخطأ المقطوع الأعظمي:

الحل

$$m=\frac{n}{4}=1 \quad , \quad h=\frac{2-1}{4}=0.25$$

$$x_i=a+ih \quad ; \quad i=0,1,2,3,4$$

$$x_0=a=1 \quad , \quad f_0=0$$

$$x_1=1.25 \quad , \quad f_1\simeq 0.348662$$

$$x_2=1.5 \quad , \quad f_2\simeq 0.912296$$

$$x_3=1.75 \quad , \quad f_3\simeq 1.71382$$

$$x_4=2=b \quad , \quad f_4\simeq 2.77259$$

$$I\simeq S=1.07061$$

$$E_T(h)\leq \frac{2(2-1)}{945}(0.25)^6(12)\simeq 6.2003\times 10^{-6}$$

$$f^{(6)}(x)=\frac{-12}{x^4}$$

$$\max_{x\in[1,2]}|f^{(6)}(x)|=\max_{x\in[1,2]}\left|\frac{-12}{x^4}\right|=12$$

④ طريقة غاوس ليجندر:

تستخدم لإيجاد تكامل محدود من الشكل: $I=\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ (1)

وهي تعطي قيمة تقريبية للتكامل I على شكل مجموع:

$$S=\sum_{i=1}^{N} w_i f(t_i) \quad (2)$$

حيث w_i تدعى أوزان

وهي أعداد موجبة

t_i هي نقاط غاوس (هي أصفار كثيرة حدود ليجندر) من الدرجة N

والسؤال الآن: كيف يمكن تعيين الأوزان ونقاط غاوس؟!

تكامل غاوس ليجندر باستخدام نقطتين لغاوس $N=2$

إذا كانت دالة التكامل لكثيرة حدود من درجة أصغر أو تساوي $2N-1$ عندئذ فإن التكامل (1) يعطى

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بدقة تامّة باستخدام $N=2$ (نقطة غاوسية) وفق الصيغة التالية:

$$S = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2)$$

المجاهيل هي الأوزان w_1 و w_2 و t_1 و t_2 نحصل على هذه المجاهيل بحل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$f(t) = 1$$

$$w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2$$

$$\Rightarrow w_1 + w_2 = 2 \quad (1)'$$

$$f(t) = t$$

$$w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0$$

$$\Rightarrow w_1 t_1 + w_2 t_2 = 0 \quad (2)'$$

$$f(t) = t^2$$

$$w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2 = \frac{2}{3} \quad (3)'$$

$$f(t) = t^3$$

$$w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$$

$$\Rightarrow w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3 = 0 \quad (4)'$$

بالحل المشترك للمعادلات $(1)'$ و $(2)'$ و $(3)'$ و $(4)'$ نحصل على

$$w_1 = w_2 = 1 \;,\; t_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \;,\; t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

فنجد:

$$S = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

تكامل غاوس ليجندر باستخدام N نقطة غاوسية

إذا كانت الدالة $f(t)$ كثيرة حدود من درجة أصغر أو تساوي $2N-1$ فإن التكامل (1) يعطى بدقة تامّة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(2) باستخدام N نقطة غاوسية وفق العلاقة

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{N} w_i f(t_i)$$

حيث المجاهيل t_i و w_i التي عددها $2N$ مجهول

باستخدام جملة المعادلات:

$$f(t)=1 \;,\; w_1 + w_2 + \cdots + w_N = 2$$

$$f(t)=t \;,\; t_1 w_1 + t_2 w_2 + \cdots + t_N w_N = 0$$

$$\vdots$$

$$f(t)=t^i \;,\; t_1^i w_1 + t_2^i w_2 + \cdots + t_N^i w_N = \frac{[1-(-1)^{i+1}]}{i+1}$$

$$\vdots$$

$$f(t)=t^{N-1} \;,\; t_1^{N-1} w_1 + t_2^{N-1} w_2 + \cdots + t_N^{N-1} w_N = \frac{[1-(-1)^{N}]}{N}$$

أما t_i حيث $i = 1, \ldots, N$ من

كثيرة حدود ليجندر $L_N(t)$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة