نموذج A

1) ناقش كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة فيما إذا كانت مختزلة أم لا في $Q[x]$

① $f(x) = 5x^3 + 9x^2 + 1$

② $g(x) = x^{10} + 9x^4 + 6x^2 + 12$

③ $h(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

2) ليكن $F_n = 2^{2^n} + 1$ حيث n عدد صحيح موجب تماماً أثبت أن $Z_3[x]/\langle f(x)\rangle$ حقل علماً أن $f(x) = x^3 + F_n x + 2$

ثم عين هذا الحقل وما هو عدد عناصره.

الحل

1) ① نستخدم معيار الاختزال (التحفيض) من أجل $p = 2$:

$$\overline{f(x)} = x^3 + x^2 + 1 \in Z_2[x]$$

حيث $Z_2 = \{0, 1\}$ حقل، و $\deg f(x) = \deg \overline{f(x)} = 3$

$$\overline{f(0)} = 1 + 0, \quad \overline{f(1)} = 1 + 0$$

نلاحظ بأن $\overline{f(x)}$ لا تملك جذر في Z_2

بالتالي $\overline{f(x)}$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Z_2[x]$

وعليه $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Q[x]$

وذلك حسب معيار الاختزال (التحفيض).

② $a_0 = 12$ ، $a_1 = 0$ ، $a_2 = 6$ ، $a_3 = 0$ ، $a_4 = 9$ ،

$a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$ ، $a_{10} = 1$

يوجد عدد أولي $p = 3$ يحقق : ① $p \nmid a_{10}$

② $\forall\, 0 \le i \le 9$ $\quad p \mid a_i$

③ $p^2 \nmid a_0$ حيث $p^2 = 9$

بالتالي $g(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$ حسب معيار إيزنشتاين.

③ نعلم أن : $\phi_p(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$

لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$ حيث p عدد أولي

وبوضع $p = 7$: $\quad \phi_7(x) = h(x)$

فإن $h(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$.

[2] حتى يكون $Z_3[x] / \langle f(x) \rangle$ حقل يجب أن يكون $\langle f(x) \rangle$ إيديال أعظمي في $Z_3[x]$ وحتى يكون $\langle f(x) \rangle$ إيديال أعظمي في $Z_3[x]$ يجب أن تكون $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة فوق $Z_3[x]$

$Z_3 = \{0, 1, 2\}$ حقل ، $\deg f(x) = 3$

$f(0) = 2 \neq 0$ $\quad F_n = 2^{2^n} + 1 \equiv 2 \pmod 3$

$f(1) = 2 \neq 0$ $\quad 2^{2^n} + 1 \equiv (-1)^{2^n} + 1 \pmod 3$ لأن

$f(2) = 2 \neq 0$

نلاحظ أن $f(x)$ لا تملك جذور في Z_3 ، بالتالي $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Z_3[x]$ و $\langle f(x) \rangle$ إيديال أعظمي في $Z_3[x]$ و $Z_3[x] / \langle f(x) \rangle$ حقل.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$Z_3[x]/\langle f(x)\rangle = \{ax^2+bx+c+\langle f(x)\rangle ; a,b,c \in Z_3\}$

عدد عناصر الحقل $3^3 = 27$

نموذج B

II نافش كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة فيما إذا كانت مختزلة أم لا في $Q[x]$

① $f(x) = 15x^3 + 5x^2 + 1$

② $g(x) = x^{11} + 8x^7 + 6x^2 + 18$

③ $h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

2 ليكن $F_n = 2^{2^n}+1$ حيث n عدد صحيح موجب تماماً

أثبت أن $Z_2[x]/\langle f(x)\rangle$ حقل علماً أن:

$f(x) = x^3 + F_n x + 1$

ثم عين هذا الحقل وما هو عدد عناصره.

الحل

II ① نستخدم معيار الاختزال (التحفيض) من أجل $p=2$:

$\overline{f(x)} = x^3 + x^2 + 1 \in Z_2[x]$

حيث $Z_2 = \{0,1\}$ و $\deg f(x) = \deg \overline{f(x)} = 3$

$\overline{f(0)} = 1 + 0$, $\overline{f(1)} = 1 + 0$

نلاحظ بأن $\overline{f(x)}$ لا تملك جذور في Z_2

بالتالي $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Z_2[x]$

ومنه $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Q[x]$

وذلك حسب معيار الاختزال (التحفيض).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② $a_0 = 18$, $a_1 = 0$, $a_2 = 6$, $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$,

$a_7 = 8$, $a_9 = a_{10} = 0$, $a_{11} = 1$

يوجد عدد أولي $p = 2$ يحقق: ① $p \nmid a_{11}$

② $p \mid a_i \quad \forall 0 < i < 10$

③ $p^2 \nmid a_0$ حيث $p^2 = 4$

بالتالي $g(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Q[x]$

حسب معيار إيزنشتاين.

③ نعلم أن: $\phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$

لا مختزلة في $Q[x]$ حيث p عدد أولي

ويوضع $p = 5$: $\phi_5(x) = h(x)$

فإن $h(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Q[x]$:

② حتى يكون $Z_2[x]/\langle f(x)\rangle$ حقل يجب أن يكون $\langle f(x)\rangle$ إيديال أعظمي في $Z_2[x]$ وحتى يكون $\langle f(x)\rangle$ إيديال أعظمي في $Z_2[x]$ يجب أن يكون $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Z_2[x]$

$Z_2 = \{0, 1\}$ حقل و $\deg f(x) = 3$

$F_n = 2^{2^n} + 1 \equiv 0 + 1 \pmod 2$

$F_n \equiv 1 \pmod 2$

$f(0) = 1 \neq 0$

$f(1) = 1 \neq 0$

نلاحظ أن $f(x)$ لا تملك جذر في Z_2، بالتالي $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Z_2[x]$، و $\langle f(x)\rangle$ إيديال أعظمي في $Z_2[x]$ و $Z_2[x]/\langle f(x)\rangle$ حقل.

$Z_2[x]/\langle f(x)\rangle = \{ax^2 + bx + c + \langle f(x)\rangle ; a, b, c \in Z_2\}$

عدد عناصر الحقل $2^3 = 8$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة