كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : **الخامسة عشر** /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مثال (وظيفة سابقة)

أوجد $[Q(\sqrt[6]{2}):Q]$ واستنتج القاعدة لـ $Q(\sqrt[6]{2})$ فوق Q.

الحل $[Q(\sqrt[6]{2}):Q] = deg(\sqrt[6]{2}, Q) = deg(irr(\sqrt[6]{2}, Q))$

نلاحظ أن $\alpha = \sqrt[6]{2}$ جذر لـ $p(x) = x^6 - 2 \in Q[x]$

و $p(x)$ كثيرة حدود موحدة (العامل الرئيس لها واحد)

و $p(x)$ لاختزالة فوق $Q[x]$ حسب معيار إيزنشتاين من أجل العدد الأولي $p = 2$، بالتالي: $irr(\sqrt[6]{2}, Q) = x^6 - 2$

$$[Q(\sqrt[6]{2}):Q] = deg(x^6 - 2) = 6$$

القاعدة لـ $Q(\sqrt[6]{2})$ فوق Q هي:

$$\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5\} = \{1, 2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{2}{6}}, 2^{\frac{3}{6}}, 2^{\frac{4}{6}}, 2^{\frac{5}{6}}\}$$
$$= \{1, 2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{5}{6}}\}$$

تعريف: ليكن E توسيع حقلي لـ F يقال أن E توسيع جبري لـ F إذا كان كل عنصر من E هو عنصر جبري فوق F

مثال $\mathbb{C}$ ليس توسيع جبري لـ Q

لأن e, π ليست بعناصر جبرية فوق Q

برهنة ليكن E توسيع حقلي لـ F، $[E:F] = n < \infty$

عندئذ E توسيع جبري لـ F

البرهان: حتى نثبت أن E توسيع جبري لـ F يجب أن نثبت أن أي عنصر من E هو عنصر جبري فوق F

$\forall \alpha \in E$:

وبما أن $[E:F] = n < \infty$ بالتالي E فضاء شعاعي فوق F وبعده يساوي n، عندئذ المجموعة:

$\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \alpha^n\}$

مؤلفة من $(n+1)$ عنصر هذه المجموعة مرتبطة خطياً

عندئذ: يمكن التعبير عن صفر الفضاء E $(0 \in E)$ بالشكل:

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n \alpha^n = 0$$

والأمثال ليست جميعها معدومة

عندئذ توجد:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \in F[x]$$

بحيث $p(\alpha) = 0$

بالتالي α عنصر جبري فوق F، بالتالي E توسيع جبري لـ F.

ملاحظة: كل توسيع منته هو توسيع جبري

مثال: $Q(\sqrt{2})$ توسيع جبري لـ Q لأن:

$$[Q(\sqrt{2}) : Q] = 2$$

مبرهنة (دساي الدرجات)

$$\begin{bmatrix} K \\ | \\ E \\ | \\ F \end{bmatrix}$$

K توسيع منته للحقل E

E توسيع منته للحقل F

عندئذ K توسيع منته للحقل F

وإن:

$$[K:F] = [K:E] \times [E:F]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة E توسيع حقلي لـ F و $\alpha \in E$ عنصر جبري فوق F
وليكن $\beta \in F(\alpha)$ فإن: $\deg(\beta, F) \mid \deg(\alpha, F)$

ملاحظة إذا كان $\deg(\beta, F) \nmid \deg(\alpha, F)$
فإن: $\beta \notin F(\alpha)$

مثال ليكن $\alpha = \sqrt{2}$ ، $\beta = \sqrt[3]{2}$ والمطلوب:

① أوجد $[Q(\beta) : Q]$ واستنتج القاعدة لـ $Q(\beta)$ فوق Q.

② أثبت أن $\beta \notin Q(\alpha)$ و $\alpha \notin Q(\beta)$

③ أوجد $[Q(\alpha, \beta) : Q]$ واستنتج القاعدة لـ $Q(\alpha, \beta)$ فوق Q.

④ أثبت أن $Q(\alpha, \beta) = Q(\sqrt[6]{2})$ ، ماذا ستنتج:

الحل ①

$$[Q(\beta) : Q] = \deg(\beta, Q) = \deg(\text{irr}(\beta, Q))$$

نلاحظ أن β جذر لـ $p(x) = x^3 - 2 \in Q[x]$

و $p(x)$ موحدة و $p(x)$ لا مختزلة فوق Q حسب معيار إيزنشتاين من أجل العدد الأولي $p = 2$ $\Leftarrow$ $\text{irr}(\beta, Q) = x^3 - 2$

$\Rightarrow \deg(\beta, Q) = 3 \Rightarrow [Q(\beta) : Q] = 3$

القاعدة لـ $Q(\beta)$ فوق Q هي: $\{1, \beta, \beta^2\} = \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$

② * $\beta \notin Q(\alpha)$ لأنه:

$$\deg(\beta, Q) = 3 \nmid \deg(\alpha, Q) = \deg(\text{irr}(\alpha, Q))$$
$$= \deg(x^2 - 2) = 2$$

نلاحظ أن $3 \nmid 2 \Leftarrow \beta \notin Q(\alpha)$

* $\alpha \notin Q(\beta)$ لأنه:

$\deg(\alpha, Q) = 2 \nmid \deg(\beta, Q) = 3 \Rightarrow 2 \nmid 3 \Rightarrow \alpha \notin Q(\beta)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$[Q(\alpha,\beta):Q] = [Q(\alpha,\beta):Q(\alpha)] \times [Q(\alpha):Q]$ (3)

$[Q(\alpha,\beta):Q] = [Q(\alpha)(\beta):Q(\alpha)] \times [Q(\alpha):Q]$

حساب $[Q(\alpha):Q]$

$Q(\alpha,\beta)$
|
$Q(\alpha)$
|
Q

$[Q(\alpha):Q] = \deg(\alpha, Q) = 2$

والقاعدة لـ $Q(\alpha)$ فوق Q هي:

$\{1, \alpha\} = \{1, \sqrt{2}\}$

حساب $[Q(\alpha)(\beta):Q(\alpha)]$

$[Q(\alpha)(\beta):Q(\alpha)] = \deg(\beta, Q(\alpha)) = \deg(\text{irr}(\beta, Q(\alpha)))$

نلاحظ بأن $\beta = \sqrt[3]{2}$ جذر لكثيرة الحدود:

$f(x) = x^3 - 2 \in Q(\alpha)[x]$

و $f(x)$ موحدة و $f(x)$ لا مختزلة فوق $Q(\alpha)[x]$

لأن أصفار الدالة $f(x)$ هي: $\sqrt[3]{2}$, $w\sqrt[3]{2}$, $w^2\sqrt[3]{2}$

حيث $w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ لا تنتمي إلى $Q(\alpha)$

$\text{irr}(\beta, Q(\alpha)) = x^3 - 2 \Leftarrow \deg(\text{irr}(\beta, Q(\alpha))) = 3$

القاعدة لـ $Q(\alpha,\beta) = Q(\alpha)Q(\beta)$ فوق $Q(\alpha)$ هي:

$\{1, \beta, \beta^2\} = \{1, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}\}$

بالتالي: $[Q(\alpha,\beta):Q] = 3 \times 2 = 6$

والقاعدة لـ $Q(\alpha,\beta)$ فوق Q هي:

$\{1, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}\} \times \{1, \sqrt{2}\} = \{1, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{5}{6}}, 2^{\frac{7}{6}}\}$

$Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = Q(\sqrt[6]{2})$ (4)

الاحتواء الأول:

$Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \subset Q(\sqrt[6]{2})$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\sqrt{2} = (\sqrt[6]{2})^3 = \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{2} \in Q(\sqrt[6]{2})$

$\sqrt[3]{2} = (\sqrt[6]{2})^2 = \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{2} \in Q(\sqrt[6]{2})$

نلاحظ أن $Q \subset Q(\sqrt[6]{2})$ و $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2} \in Q(\sqrt[6]{2})$ $\Rightarrow Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \subseteq Q(\sqrt[6]{2})$

الاحتواء الثاني:

$Q(\sqrt[6]{2}) \subseteq Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$

يكفي أن نبرهن أن:

$\sqrt[6]{2} \in Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$

$\sqrt[6]{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times (\sqrt[3]{2})^2$

$\sqrt[6]{2} \in Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ و $Q \subset Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ $\Rightarrow Q(\sqrt[6]{2}) \subset Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$

مما سبق نجد أن:

$Q(\sqrt[6]{2}) = Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$

وبالتالي $Q(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ توسيع بسيط لـ $Q(\sqrt[6]{2})$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة