كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الرابعة عشر /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مبرهنة إذا كان $E$ توسيع حقلي لـ $F$ و $\alpha \in E$ عنصر جبري فوق $F$ بالتالي توجد كثيرة حدود $p(x)$ لامختزلة فوق $F$ وموحدة (وحيدة) و $\alpha$ جذراً لها وهي ذات الدرجة الأصغر بين جميع كثيرات الحدود التي تقبل $\alpha$ جذراً لها.

سمي $p(x)$ كثيرة الحدود الأصغرية للعنصر الجبري $\alpha$ فوق $F$ ويرمز لها بالرمز $irr(\alpha, F)$

مثال أوجد كثيرة الحدود الأصغرية للعنصر $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ فوق $\mathbb{Q}$.

الحل المطلوب هو $irr(\alpha, \mathbb{Q})$

$\alpha = \sqrt[4]{2} \Rightarrow \alpha^4 = 2 \Rightarrow \alpha^4 - 2 = 0$

$\alpha$ جذر لـ $p(x) = x^4 - 2$

نلاحظ بأن $p(x)$ لامختزلة فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار إيزنشتاين من أجل العدد الأولي $p = 2$

$p(\alpha) = 0$

$p(x)$ وحيدة

بالتالي $irr(\alpha, \mathbb{Q}) = x^4 - 2$

تعريف: ليكن $E$ توسيع حقلي لـ $F$ و $\alpha \in E$ عنصر جبري فوق $F$ عندئذ يعرّف درجة العنصر $\alpha$ فوق $F$

$\deg(\alpha, F)$ بأنه سياوي درجة كثيرة الحدود الأصغرية للعنصر $\alpha \in E$ فوق $F$

$$\deg(\alpha, F) = \deg(\text{irr}(\alpha, F))$$

مثال أوجد درجة العنصر $\alpha = \sqrt{2} + 2 \in \mathbb{R}$ فوق الحقل $\mathbb{Q}$

الحل

$$\alpha = \sqrt{2} + 2 \Rightarrow \alpha - 2 = \sqrt{2}$$

$$(\alpha - 2)^2 = 2 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 - 2 = 0$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0$$

نلاحظ أن $\alpha$ جذر لـ: $p(x) = x^2 - 4x + 2$

$p(x)$ موحدة

$p(x)$ لاختزالة فوق $\mathbb{Q}$ حسب معيار إيزنشتاين من أجل العدد الأولي $p = 2$

نستنتج مما سبق أن: $\text{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^2 - 4x + 2$

$$\deg(\alpha, \mathbb{Q}) = \deg(\text{irr}(\alpha, \mathbb{Q})) = 2$$

ندرس في البرهنة التالية الحقل $F(\alpha)$ حيث $\alpha$ عنصر جبري فوق $F$

برهنة $E$ توسيع حقلي لـ $F$

$\alpha \in E$ عنصر جبري فوق $F$

$$\deg(\alpha, F) = n \geq 1$$

بالتالي: ① القاعدة لـ $F(\alpha)$ فوق $F$ هي: $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$

② $[F(\alpha) : F] = n = \deg(\alpha, F)$

③ $F(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} ; a_0, \dots, a_{n-1} \in F\}$

مثال: ليكن $\alpha = \sqrt[3]{3} \in \mathbb{R}$ ① أوجد $irr(\alpha, \mathbb{Q})$.

② أوجد $deg(\alpha, \mathbb{Q})$.

③ أوجد القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$ ثم عيّن شكل عناصر الحقل $\mathbb{Q}(\alpha)$.

الحل ①

$\alpha = \sqrt[3]{3} \Rightarrow \alpha^3 = 3 \Rightarrow \alpha^3 - 3 = 0$

إذن $\alpha$ جذر لـ: $p(x) = x^3 - 3$

وهي كثيرة حدود لا مختزلة فوق $\mathbb{Q}[x]$

و $p(x)$ موحدة و $p(\alpha) = 0$، مما سبق نجد: $irr(\alpha, \mathbb{Q}) = x^3 - 3$

② $deg(\alpha, \mathbb{Q}) = deg(irr(\alpha, \mathbb{Q})) = 3$

③ لدينا $\alpha$ عنصر جبري فوق $\mathbb{Q}$ و $deg(\alpha, \mathbb{Q}) = 3$

عندئذ حسب البرهنة السابقة نجد أن:

$\{1, \alpha, \alpha^2\} = \{1, \sqrt[3]{3}, (\sqrt[3]{3})^2\}$

قاعدة لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ فوق $\mathbb{Q}$ عندئذ:

$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 3$

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) = \{c_0 + c_1\sqrt[3]{3} + c_2(\sqrt[3]{3})^2 ; c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}\}$

وظيفة: أوجد $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$ واستنتج القاعدة لـ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ فوق $\mathbb{Q}$.

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة