كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : **الثالثة عشر /نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٣

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف: يقال عن الحقل E بأنه توسيع للحقل F إذا كان $F \subset E$ ونرمز عندئذ بالرمز E/F

مثال: $\mathbb{C}$ توسيع للحقل $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ توسيع للحقل $\mathbb{Q}$

ملاحظة: إذا كان E توسيع حقلي لـ F عندئذ يكون E فضاء شعاعي فوق F

ملاحظة: E فضاء شعاعي فوق F

المجموعة $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset E$ قاعدة لـ E فوق F إذا تحقق مايلي:

① S مجموعة مولدة لـ E فوق F

$$\forall y \in E : y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$

② S مستقلة خطياً: إذا كان

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$

عندئذ $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

فإذا كانت $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ قاعدة للفضاء الشعاعي E فإن $\dim E = n$ (فوق F)

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

مثال: لنأخذ المجموعة $K=\{a+b\sqrt{2}\ ;\ a,b\in\mathbb{Q}\}$

حيث $\mathbb{Q}$ حقل الأعداد الكسرية

التي تشكل حقل بالنسبة للعمليتين:

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

عندئذ هل K توسيع حقلي لـ $\mathbb{Q}$، ومن حال الإيجاب أوجد $[K:\mathbb{Q}]$

تعريف: ليكن E توسيع حقلي لـ F، يقال عن التوسيع E للحقل F بأنه توسيع منتهٍ (توسيع منتهي) من الدرجة n إذا كان بعد الفضاء الشعاعي E فوق F يساوي n ونرمز لذلك بـ $[E:F]=n$

حل المثال

$$\forall a\in\mathbb{Q}:\ a=a+0\sqrt{2}\Rightarrow a\in K$$

$$\mathbb{Q}\subset K$$

$\Rightarrow$ K توسيع حقلي لـ $\mathbb{Q}$

* المجموعة $\{1,\sqrt{2}\}$ قاعدة لـ K فوق $\mathbb{Q}$، لأن:

$\{1,\sqrt{2}\}$ تولد لـ K فوق $\mathbb{Q}$

$$\forall y\in K\ ;\ y=a.1+b\sqrt{2}\ ;\ a,b\in\mathbb{Q}$$

$\{1,\sqrt{2}\}$ مستقلة خطياً: بحال $\alpha_1.1+\alpha_2.\sqrt{2}=0$

لنثبت أن: $\alpha_1=\alpha_2=0$ حيث $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Q}$

نفرض أن $\alpha_2\neq 0$ عندئذ $\sqrt{2}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\in\mathbb{Q}$ مرفوض

$\Rightarrow \alpha_2=0\Rightarrow \alpha_1=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عندئذ نلاحظ بأن $\{1, \sqrt{2}\}$ قاعدة لـ K فوق $\mathbb{Q}$
و $[K:\mathbb{Q}] = 2$

تعريف: E توسيع حقلي لـ F
$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعة جزئية من E
يعرف الحقل $F(s)$ أو $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ بأنه سيأتي إلى تقاطع جميع الحقول الجزئية من E والتي كل منها يحوي الحقل F والمجموعة S.

مثال: $\mathbb{C}$ توسيع حقلي لـ $\mathbb{Q}$
عندئذ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ هو أصغر حقل جزئي من $\mathbb{C}$ يحتوي العنصرين $\sqrt{2}$ و i

مبرهنة: ليكن E توسيع حقلي لـ F
① $\forall a \in F \quad F(a) = F$
② $\forall a, b \in E \quad F(a,b) = F(a)(b) = F(b)(a)$

تعريف: ليكن E توسيع حقلي لـ F، و $a \in E$، ندعو كل توسيع للحقل F من الشكل $F(a)$ بأنه توسيع بسيط للحقل F.

مثال: $\mathbb{C}$ توسيع حقلي لـ $\mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ توسيع بسيط للحقل $\mathbb{Q}$

العناصر الجبرية ـ العناصر المتسامية

تعريف: E توسيع حقلي لـ F، يسمى العنصر $\alpha \in E$ عنصر جبري فوق F إذا وجدت كثيرة حدود غير صفرية $f(x)$ من $F[x]$ بحيث $f(\alpha) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذا لم يكن α جبرياً فوق F فإن α يدعى عنصر متسامي فوق F.

تعريف: $\mathbb{C}$ توسيع حقلي لـ $\mathbb{Q}$ إذا كان $\alpha \in \mathbb{C}$ عنصر جبري فوق $\mathbb{Q}$ ويدعى α عدد جبري.

تعريف: إذا كان $\alpha \in \mathbb{C}$ عنصر متسامي فوق $\mathbb{Q}$ ويدعى α عدد متسامي.

مثال: أثبت أنه $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ عدد جبري فوق $\mathbb{Q}$.

الحل:

$$\alpha^2 = 1+\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \alpha^2 - 1$$

$$3 = (\alpha^2 - 1)^2$$

$$\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 = 3 \Rightarrow \alpha^4 - 2\alpha^2 - 2 = 0$$

نلاحظ بأن α جذر لـ $f(x)$ حيث:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$$

بالتالي α عنصر (عدد) جبري فوق $\mathbb{Q}$.

مثال: e و π هي أعداد متسامية فوق الحقل $\mathbb{Q}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أثبت أن $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ عنصر جبري فوق $\mathbb{Q}$.

الحل

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$$

$$\alpha - \sqrt{2} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (\alpha - \sqrt{2})^3 = 2$$

$$\alpha^3 - 3\sqrt{2}\alpha^2 + 6\alpha - 2\sqrt{2} = 2$$

$$\alpha^3 + 6\alpha - 2 = (3\alpha^2 + 2)\sqrt{2}$$

$$(\alpha^3 + 6\alpha - 2)^2 = (3\alpha^2 + 2)^2 \times 2$$

$$\alpha^6 + (6\alpha - 2)^2 + 2\alpha^3(6\alpha - 2) = (9\alpha^4 + 4 + 12\alpha^2) \times 2$$

$$\alpha^6 + 36\alpha^2 + 4 - 24\alpha + 12\alpha^4 - 4\alpha^3 = 18\alpha^4 + 8 + 24\alpha^2$$

$$\alpha^6 - 6\alpha^4 - 4\alpha^3 + 12\alpha^2 - 24\alpha - 4 = 0$$

نلاحظ أن α جذر لـ:

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4 \in \mathbb{Q}[x]$$

بالتالي α عدد جبري.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة