كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : **الثانية عشر** /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مبرهنة $f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$

$\deg f(x)=m$

ولیکن α جذر من $\mathbb{C}$ لـ $f(x)$ ولیکن $H=\max\limits_{0\le i\le m-1}\left|\frac{a_i}{a_m}\right|$

عندئذ $|\alpha|<1+H$

البرهان الحالة الأولى: $|\alpha|\le 1 \Rightarrow |\alpha|<1+H$

الحالة الثانية: $|\alpha|>1$

لدينا α جذر لـ $f(x)$ في $\mathbb{C}$

$$a_m\alpha^m+a_{m-1}\alpha^{m-1}+\dots+a_1\alpha+a_0=0$$

$$-a_m\alpha^m=a_{m-1}\alpha^{m-1}+\dots+a_1\alpha+a_0$$

$$\alpha^m=-\frac{a_{m-1}}{a_m}\alpha^{m-1}-\frac{a_{m-2}}{a_m}\alpha^{m-2}-\dots-\frac{a_1}{a_m}\alpha-\frac{a_0}{a_m}$$

$$|\alpha^m|\le\left|\frac{a_{m-1}}{a_m}\right||\alpha^{m-1}|+\left|\frac{a_{m-2}}{a_m}\right||\alpha^{m-2}|+\dots+\left|\frac{a_1}{a_m}\right||\alpha|+\left|\frac{a_0}{a_m}\right|$$

$$|\alpha|^m\le H(|\alpha|^{m-1}+|\alpha|^{m-2}+\dots+|\alpha|+1)$$

$$|\alpha|^m\le H\left(\frac{|\alpha|^m-1}{|\alpha|-1}\right)\Rightarrow |\alpha|^m(|\alpha|-1)\le H(|\alpha|^m-1)$$

$$|\alpha|^{m+1}-|\alpha|^m\le H|\alpha|^m-H<H|\alpha|^m$$

$|\alpha| - 1 < H \Rightarrow |\alpha| < 1 + H$

معيار Murty 2002 :

$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

$H = \max_{0 \le i \le m-1} \left| \frac{a_i}{a_m} \right|$ كثيرة حدود رئيسية و

إذا كان $f(n)$ عدد أولي من أجل عدد صحيح n

بحيث $n \ge H + 2$

بالتالي $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$

البرهان حسب عناوس :

$f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x] \Leftrightarrow f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

لنثبت أن $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

نفرض جدلاً بأن $f(x)$ مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$ بالتالي

$0 < \deg g(x) < \deg f(x)$ و $f(x) = g(x) h(x)$

$0 < \deg h(x) < \deg f(x)$

بما أن $f(n)$ عدد أولي من أجل $n \ge H + 2$

$f(n) = g(n) h(n)$

بالتالي $|g(n)| = 1$ أو $|h(n)| = 1$

ليكن مثلاً $|g(n)| = 1$ عندئذ :

$g(x) = c \prod (x - \alpha_i)$ و $|c| \ge 1$

حيث c المعامل الرئيسي لـ g

α_i جذور g

$|g(n)| = |c \prod (n - \alpha_i)| \ge |\prod (n - \alpha_i)|$

$\ge \prod (|n| - |\alpha_i|) = \prod (n - |\alpha_i|)$

$> \prod (H + 2 - 1 - H) = 1 \Rightarrow |g(n)| > 1$ هذا مرفوض

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالتالي الفرض الجدلي خاطئ و $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$
أي $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$.

مثال $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$

① أوجد الحل للمعادلة $f(x) = 157$ في مجموعة الأعداد الصحيحة .

② هل $f(x)$ مختزلة أم لا في $\mathbb{Z}[x]$.

الحل ①
$f(x) = 157$
$x^3 + x^2 + x - 155 = 0$
$(x-5)(x^2 + 6x + 31) = 0$
إما $x = 5$ أو $x^2 + 6x + 31 = 0$, $\Delta < 0$
نلاحظ بأن $f(5) = 157$ حيث 157 عدد أولي .

② الحل :
$H = \max_{0 \le i \le 2} \left| \frac{a_i}{1} \right| = 2$; $a_3 = 1$
$5 = n \ge H + 2 = 2 + 2 = 4$
حيث $f(5) = 157$ عدد مزدوج
$f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$ حسب معيار Murty

b ② : ستخدم معيار الاختزال (التحقيق) :
من أجل $p = 3$: $\overline{f(x)} = x^3 + x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$
حيث $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, فعلى , $\deg \overline{f(x)} = 3$
$\overline{f(0)} = 2 \neq 0$, $\overline{f(1)} = 2 \neq 0$, $\overline{f(2)} = 1 \neq 0$
نلاحظ أن $\overline{f(x)}$ لا تملك جذر في $\mathbb{Z}_3$
بالتالي $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}_3[x]$
و $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$ من لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

b.3: قواسم الحد الثابت: $\{-1, 1, -2, 2\}$

$\deg f(x) = 3$ ، نلاحظ أن $\forall r \in \{-1, 1, -2, 2\}$

فإن $f(r) \neq 0$ ، نلاحظ أن $f(x)$ لا يملك جذر في Q

و Q حقل ، $\deg f(x) = 3 \Leftarrow f(x)$ لا تختزل في $Q[x]$

و $f(x)$ كثيرة حدود ريئية بالتالي $f(x)$ لا تختزل في $Z[x]$ حسب غاوس.

مثال: لتكن $f(x) = x^3 + x^2 + 7x + 11 \in Z[x]$

هل $f(x)$ تختزل أم لا في $Z[x]$.

الحل: b.1: حسب معيار osada:

$p = 11$ عدد أولي ، $a_1 = 7$ ، $a_2 = 1$

$1 + |a_1| + |a_2| = 9 < 11 = p$

بالتالي $f(x)$ لا تختزل في $Z[x]$.

b.2: حسب معيار التحفيظ (الاختزال):

من أجل $p = 2$ عندئذ: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in Z_2[x]$

$Z_2 = \{0, 1\}$ حقل $\Rightarrow \overline{f(1)} = 0$ ، $\overline{f(0)} = 1$

$\overline{f(x)}$ قبلت صفر في Z_2 عندئذ $f(x)$ تختزل في $Z_2[x]$

من أجل $p = 3$ عندئذ:

$\overline{f(x)} = x^3 + x^2 + x + 2 \in Z_3[x]$

$Z_3 = \{0, 1, 2\}$ حقل ، $\overline{f(0)} = 2 \neq 0$ ، $\overline{f(1)} = 2 \neq 0$ ،

$\overline{f(2)} = 1 \neq 0$

$\overline{f(x)}$ كثيرة حدود لا تختزل فوق $Z_3[x]$.

بالتالي $f(x)$ لا تختزل فوق $Q[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ومنه $f(x)$ لا تحلل فوق $\mathbb{Z}[x]$.

b. $\deg f(x) = 3$ ، قواسم العدد الثابت هي:

$\{-1, 1, -11, 11\}$

$f(-1) = 4 \neq 0$ ، $f(1) = 20 \neq 0$ ، $f(-11) = -1276 \neq 0$ ،

$f(11) = 1540 \neq 0$

نلاحظ بأن $f(x)$ لا تملك جذر في $\mathbb{Q}$ ، و $\deg f(x) = 3$

بالتالي $f(x)$ لا تحلل في $\mathbb{Q}[x]$ وهي كثيرة حدود أولية

بالتالي $f(x)$ لا تحلل في $\mathbb{Z}[x]$.

مثال: إذا كانت $f(x) = x^4 + 6x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$

هل $f(x)$ تحلل أم لا في $\mathbb{Z}[x]$.

الحل: حسب معيار Murty:

$$H = \max_{0 \leq i \leq 3} \left| \frac{a_i}{a_4} \right| = 6$$

نلاحظ بأنه يوجد $n = 8$

حيث $n \geq H + 2$

عدد أولي $f(n) = f(8) = 4481$

بالتالي $f(x)$ كثيرة حدود لا تحلل في $\mathbb{Z}[x]$.

انتهت المحاضرة