كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : **الحادية عشر** /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

معيار Osada 1987 ليكن p عدد أولي

$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + p \in \mathbb{Z}[x]$

$p > 1 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}|$

عندئذ $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

البرهان نفرض جدلاً بأن $f(x)$ مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

$f(x) = g(x)\,h(x)$

$g(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$

$h(x) = x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \dots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$

نلاحظ بأن $b_0 c_0 = p \longrightarrow |b_0 c_0| = p$

$\longrightarrow p$

بالتالي $|c_0| = 1$ أو $|b_0| = 1$

وليكن مثلاً $|b_0| = 1$ أي $b_0 = 1$ or -1

* بالتالي القيمة المطلقة لحد جذور g تساوي 1

التحليل: نعلم بأن $g(x)$ تكتب بدلالة جذورها بالشكل التالي:

$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m)$

حيث x_i جذور $g(x)$ $\forall\, 1 \le i \le m$

نشر الطرف الثاني نحصل على حد الجذور

بالتالي: $|x_1 x_2 \dots x_m| = |b_0| = 1$

* نلاحظ بأن $g(x)$ تملك جذر α بحيث $|\alpha| < 1$

التعليل: لأنه لو كانت جميع جذور $g(x)$ تقع خارج دائرة الوحدة $C:|z|<1$ عندئذ القيمة المطلقة لحداء جذور و أكبر من الواحد وهذا مرفوض.

* لدينا $g(x)$ تملك جذر α بحيث $|\alpha|<1$ بالتالي $f(\alpha)=0$ بالتالي $f(x)$ تملك جذر α علماً أن $|\alpha|<1$

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \dots + a_1\alpha \mp p$$

$$\mp p = -\alpha^n - a_{n-1}\alpha^{n-1} - a_{n-2}\alpha^{n-2} - \dots - a_1\alpha$$

$$p = |-\alpha^n - a_{n-1}\alpha^{n-1} - a_{n-2}\alpha^{n-2} - \dots - a_1\alpha|$$

$$p \le |\alpha|^n + |a_{n-1}||\alpha|^{n-1} + |a_{n-2}||\alpha|^{n-2} + \dots + |a_1||\alpha|$$

$$p < 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1|$$

$$p < 1 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-2}| + |a_{n-1}|$$

وهذا مرفوض فالفرض الجدلي خاطئ

بالتالي $f(x)$ لا مختزلة بـ $\mathbb{Z}[x]$.

مثال: هل $f(x) = x^8 + 9x^2 + 3x - 31 \in \mathbb{Z}[x]$ مختزلة أم لا بـ $\mathbb{Z}[x]$؟

الحل: $p = 31$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$

$a_8 = 1$

$$1 + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| + |a_6| + |a_7| = 1 + 3 + 9 = 13$$

نلاحظ أن $p = 31 > 13$

بالتالي $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة بـ $\mathbb{Z}[x]$ حسب معيار osada أوساداً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: $f(x) = x^3 + x^2 + 7x + 11 \in \mathbb{Z}[x]$

هل $f(x)$ كثيرة حدود مختزلة أم لا في $\mathbb{Z}[x]$.

الحل b1: حسب معيار osada أوساداً:

$a_1 = 7, a_2 = 1, a_3 = 1, p = 11$

$1 + |a_2| + |a_1| = 1 + 1 + 7 = 9 < p = 11$

بالتالي $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.

b2: حسب معيار التقفيض (الاختزال):

من أجل $p = 2$: $\overline{f(x)} = x^3 + x^2 + x + 1 \in Z_2[x]$

حقل $Z_2 = \{0, 1\}$، $\deg \overline{f(x)} = 3$

$\overline{f(0)} = 1 \neq 0$ ، $\overline{f(1)} = 0$

بالتالي $\overline{f(x)}$ تملك صفر من Z_2 مرتبة كثيرة حدود مختزلة فوق $Z_2[x]$.

من أجل $p = 3$: $\overline{f(x)} = x^3 + x^2 + x + 2 \in Z_3[x]$

حقل $Z_3 = \{0, 1, 2\}$، $\deg \overline{f(x)} = 3$

$\overline{f(0)} = 2 \neq 0$ ، $\overline{f(1)} = 2 \neq 0$ ، $\overline{f(2)} = 1 \neq 0$

بالتالي $\overline{f(x)}$ لا تملك صفر من Z_3 مرتبة كثيرة حدود لا مختزلة فوق $Z_3[x]$.

ومنه $f(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة فوق $\mathbb{Z}[x]$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة