كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : **العاشرة** /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

اختبار (معيار) إيزنشتاين 1850:

ليكن $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

* إذا وجد عدد أولي p بحيث:

① $p \nmid a_n$

② $\forall 0 \le i \le n-1 \quad p \mid a_i$

③ $p^2 \nmid a_0$

عندئذ تكون كثيرة الحدود $f(x)$ لا مختزلة فوق $\mathbb{Q}[x]$

وبالتالي $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

نعرف $f(x)$ في هذه الحالة بكثيرة حدود إيزنشتاين

ملاحظة معيار إيزنشتاين إذا لم يتحقق من أجل عدد أولي ما p فلا نستطيع أن نقول بأن $f(x)$ مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$

ولكن يجب علينا البحث عن معايير أخرى لدراسة وضع كثيرة الحدود $f(x)$.

مثال $f(x) = x^6 + 9x^4 + 12x^2 + 6 \in \mathbb{Z}[x]$

هل $f(x)$ مختزلة أم لا في $\mathbb{Z}[x]$ ؟

الحل $a_0 = 6, a_1 = 0, a_2 = 12, a_3 = 0, a_4 = 9, a_5 = 0$

$a_6 = 1$

من أجل $p = 3$ عدد أولي: ① $3 \nmid 1$ أي $p \nmid a_6$

② $3 \mid 0$ & $3 \mid 9$ & $3 \mid 12$ أي $\forall 0 \le i \le 5 \quad p \mid a_i$

③ $p^2 = 9 \nmid 6$

نستنتج بأن $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$ ⟸
حسب معيار إيزنشتاين إن $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$

مثال: $\varphi(x) = x^4 + 3x^2 + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ أثبت أن $\varphi(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$.

الحل: نلاحظ بأن شروط معيار إيزنشتاين محققة من أجل $p=3$ بالتالي $\varphi(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$
وبالتالي $\varphi(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.

مثال: ليكن $\varphi(x) = 3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 10x + 20 \in \mathbb{Z}[x]$
أثبت أن $\mathbb{Q}[x]/\langle \varphi(x) \rangle$ حقل.

الحل: لإثبات أن $\mathbb{Q}[x]/\langle \varphi(x) \rangle$ حقل يكفي إثبات أن المثالي $\langle \varphi(x) \rangle$ مثالي أعظمي في $\mathbb{Q}[x]$
ولإثبات أن المثالي $\langle \varphi(x) \rangle$ مثالي أعظمي في $\mathbb{Q}[x]$ يجب إثبات أن $\varphi(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$.

* من أجل $p=5$: ① $p \nmid a_5 = 3$

② $p \mid a_i \quad \forall 0 \le i \le 4$ $\quad 5 \mid 10 \;\&\; 5 \mid 0 \;\&\; 5 \mid -20 \;\&\; 5 \mid 15$

③ $p^2 \nmid a_0 = 20$

حسب معيار إيزنشتاين نجد أن $\varphi(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Q}[x]$
بالتالي $\langle \varphi(x) \rangle$ مثالي أعظمي في $\mathbb{Q}[x]$.
بالتالي $\mathbb{Q}[x]/\langle \varphi(x) \rangle$ حقل.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال $f(x)=\frac{x^6}{6}-\frac{5}{6}x+\frac{15}{6}\in Q[x]$

هل $f(x)$ مختزلة أم لا في $Q[x]$ ؟

الحل لنأخذ $\varphi(x)=6f(x)=x^6-5x+15$

نلاحظ بأن $\varphi(x)$ كثيرة حدود إيزنشتاين من أجل العدد الأولي $p=5$ (نلاحظ أن شروط معيار إيزنشتاين محققة من أجل العدد الأولي $p=5$)

بالتالي $\varphi(x)=6f(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$ و Q حقل

$\Leftarrow f(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$.

مثال أثبت أن كثيرة الحدود (p عدد أولي) $\Phi_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}$

$\Phi_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+x+1$

هي كثيرة حدود لا مختزلة مرة في $Q[x]$.

الحل لنأخذ $f(x)=\Phi_p(x+1)$

$$f(x)=\frac{(x+1)^p-1}{x+1-1}=\frac{(x+1)^p-1}{x}$$

ونعلم بأن:

$$(x+1)^p=x^p+px^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2}x^{p-2}+\dots+\frac{p(p-1)}{2}x^2+px+1$$

$$(x+1)^p-1=x^p+px^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2}x^{p-2}+\dots+\frac{p(p-1)}{2}x^2+px$$

$$f(x)=x^{p-1}+px^{p-2}+\frac{p(p-1)}{2}x^{p-3}+\dots+\frac{p(p-1)}{2}x+p$$

نلاحظ أن $f(x)$ كثيرة حدود إيزنشتاين من أجل العدد الأولي p بالتالي $f(x)=\Phi_p(x+1)$ لا مختزلة في $Q[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالتالي $\Phi_p(x)$ كثيرة حدود لا مختزلة في $Q[x]$

ملاحظة منشور الكرمين ـ نيوتن $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

حيث $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

معيار التحقيق (الاختزال)

ليكن p عدد أولي : $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$

$\deg f(x) = n > 0$

لنفرض $a_i \equiv \bar{a}_i \pmod p$ بالتالي :

$\overline{f(x)} = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i x^i \in Z_p[x]$

عندئذ إذا كانت $\overline{f(x)}$ لا مختزلة في $Z_p[x]$

$\deg f(x) = \deg \overline{f(x)}$

بالتالي $f(x)$ لا مختزلة فوق $Q[x]$

وبالتالي لا مختزلة فوق $\mathbb{Z}[x]$.

مثال $f(x) = 21x^3 - 3x^2 + 2x + 9 \in \mathbb{Z}[x]$

أثبت أن $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.

الحل من أجل $p = 2$ نحصل على كثيرة الحدود التالية :

$\overline{f(x)} = x^3 + x^2 + 1 \in Z_2[x]$

حيث $Z_2 = \{0, 1\}$ حقل و $\deg f(x) = \deg \overline{f(x)}$

نلاحظ أن $\overline{f(x)}$ لا تملك جذر في $Z_2[x]$ وبالتالي

حسب معيار التحقيق $f(x)$ لا مختزلة في $Q[x]$

$\Leftarrow$ $f(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{Z}[x]$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $f(x) = 21x^3 - 3x^2 + 2x + 8 \in \mathbb{Z}[x]$

هل $f(x)$ مختزلة أم لا في $\mathbb{Z}[x]$ ؟

الحل: * من أجل $p=2$ نحصل على كثيرة الحدود:

$\overline{f(x)} = x^3 + x^2 \in Z_2[x]$

كثيرة الحدود $\overline{f(x)}$ تملك صفرين هما 0 و 1

بالتالي $\overline{f(x)}$ مختزلة في $Z_2[x]$.

وبالتالي معيار الاختزال لا يعطينا جواب حول وضع كثيرة الحدود $f(x)$ إن كانت مختزلة أم لا في $\mathbb{Z}[x]$

من أجل العدد الأولي $p=2$

* من أجل $p=5$ نحصل على كثيرة الحدود:

$\overline{f(x)} = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \in Z_5[x]$

حيث $\deg f(x) = \deg \overline{f(x)}$ لأن $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

ندرس وضع $f(x)$: $\overline{f(x)}$ لا تملك جذور في Z_5

لأن: $\overline{f(0)} = 3 \neq 0$, $\overline{f(1)} = 3 \neq 0$, $\overline{f(2)} = 3 \neq 0$,

$\overline{f(3)} = 4 \neq 0$, $\overline{f(4)} = 2 \neq 0$

بالتالي $\overline{f(x)}$ لا تختزل في $Z_5[x]$ بالتالي

حسب معيار التحفيض $f(x)$ لا تختزل في $Q[x]$

ومنه $f(x)$ لا تختزل في $\mathbb{Z}[x]$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة