كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية

المحاضرة : الثامنة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

1-) $x^2y'' - 4xy' + (6-x^2)y = 0$

المعادلة تكتب بالشكل:

$$y'' - \underbrace{\frac{4}{x}}_{p(x)} y' + \left(\underbrace{\frac{6}{x^2}}_{q(x)} - 1\right) y = 0$$

الشرط: $Q(x) = \frac{-p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q = 1$

نفرض: $y = uZ$ حيث $u = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} = e^{-\frac{1}{2}\int -\frac{4}{x} dx}$

$= -\frac{1}{2}(-4\ln x)$

$\Rightarrow u = e^{2\ln x} = x^2$

$y = uZ = x^2 Z$

سؤال: $p' = (-4x^{-1})' = 4x^{-2} = \frac{4}{x^2}$

$\frac{-2}{x^2} - \frac{16}{4x^2} + \frac{6}{x^2} = -1$

$\frac{-2}{x^2} - \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^2} = -1$

بعد التعويض نحصل على:

$$z'' - z = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$z = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$$

وعند الحل العام للمعادلة:

$$y = x^2 (c_1 e^{-x} + c_2 e^{x})$$

2- $y'' - y' + e^{2x} y = 0$

$$q' + 2pq = 2e^{2x} + 2(-1)(e^{2x}) = 0$$

$$t' = e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-\int -1\,dx} = e^{x} \Rightarrow \boxed{t = e^{x}}$$

عندما يتحقق الشرط يضع المعادلة:

$$\boxed{y_t'' + \frac{q}{t'^2} y = 0} \Rightarrow y_t'' + y = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp 1i$$

الحل العام للمعادلة:

$$Y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$\Rightarrow Y = c_1 \cos e^{x} + c_2 \sin e^{x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3-) $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$

الحل: معادلة أويلر: نفرض: $x = e^t$ فنجد:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

الحل العام:

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

$$= c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x)$$

4-) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

الحل: نأخذ المعادلة المتجانسة:

$$y'' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \mp i$$

الحل العام للمتجانسة:

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

نعتبر الثوابت توابع لـ x فنجد:

$$y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

* شرح:

$$c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0$$

$$c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = R(x)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نشتق ونعوض: ① $c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0$

② $-c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \frac{1}{\sin x}$ R(n)

من ① نجد:

$$c_2'(x) = \frac{-\cos x}{\sin x}\, c_1'(x)$$

نعوض في ②:

$$-c_1'(x)\sin x - \frac{\cos x}{\sin x}\, c_1'(x)\cos x = \frac{1}{\sin x}$$

$$c_1'(x) = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x + c_1$$ منه نجد:

$$c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow c_2(x) = \ln\sin x + c_2$$

الحل الخاص: $y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$

$$y_p = -x\cos x + \sin x \ln(\sin x)$$

الحل العام: $y = y_h + y_p =$

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x + \sin x \ln(\sin x)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* أوجد الحل العام بطريقة التفتيش للمعادلات التفاضلية الآتية :

1-) $y'' + 2y' - 3y = 10\, e^{2x}$

الحل : نأخذ المعادلة المتجانسة :

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

معادلة مميزة :

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$$

إما $\lambda = -3$

أو $\lambda = 1$

الحل العام للمتجانسة :

$$y_H = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}$$

نلاحظ أن $a = 2$ ليس جذر للمعادلة المميزة وبالتالي نفرض $S = 0$

حالة من الشكل :

$$y_p = A x^S e^{ax}$$

$$y_p = A e^{2x}$$

-3	x	$y = A e^{2x}$
2	x	$y' = 2A e^{2x}$
1	x	$y'' = 4A e^{2x}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$5Ae^{2x} = 10e^{2x} \Rightarrow 5A = 10$

$\Rightarrow A = \frac{10}{5} = 2$

$y_p = 2e^{2x}$

الحل العام:

$y = y_h + y_p$

$= c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x} + 2e^{2x}$

2-) $y'' + y = \sin x$

الحل: نأخذ المعادلة المتجانسة:

$y'' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i$

الحل العام للمتجانسة (الحل المتمم):

$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

نلاحظ أن $a+ib$ جذر بسيط للمعادلة المميزة بالتالي $s=1$

$= \pm i$ نفرض حلاً من الشكل:

$y_p = x(A\cos x + B\sin x)$

1	x	$y = x(A\cos x + B\sin x)$
0	x	$y' = (A\cos x + B\sin x) + x(-A\sin x + B\cos x)$
1	x	$y'' = (-A\sin x + B\cos x) + 1(-A\sin x + B\cos x) + x(A\cos x - B\sin x)$

$$y'' = 2(-A\sin x + B\cos x) + x(-A\cos x - B\sin x)$$

$$2B\cos x - 2A\sin x = \sin x$$

$$2B\cos x = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$-2A\sin x = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

الحل الخاص : $y_p = -\frac{1}{2}x\cos x$

الحل العام :

$$y = y_h + y_p = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة