كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : **السابعة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التوابع العكسية:

1- تابع الجيب المثلثي $y = \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

1- التابع $\sin x$ معرف ومستمر على $\mathbb{R}$

2- $\sin x$ تابع دوري ودوره 2π

3- تابع $\sin x$ له نقاط انعدام على $\mathbb{R}$ من أجل $k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

4- التابع $\sin x$ يصير تقابلي على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ويأخذ قيمه على المجال $[-1, 1]$

5- التابع $\sin x$ متزايد تماماً على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

* إذاً يقبل التابع $\sin x = y$ تابع عكسي نرمز له بالرمز $y = \arcsin x$ ويحقق ما يلي:

a) $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

$\arcsin x : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

b) معرف ومستمر على مجموعة تعريفه $[-1, 1]$

c) متزايد تماماً على المجال $[-1, 1]$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	-1	↗	0	↗	1

d) التابع $y = \sin x$ فردي إذاً خطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

* أيضاً التابع العكسي $y = \arcsin x$ فردي

الإثبات:

* $\forall x \in [-1,1] \Leftarrow x \in [-1,1]$

* نفرض $z = \arcsin(-x) \Leftarrow \sin z = -x$

$\Leftarrow x = -\sin z$

ولكن $y = \arcsin x$

$\Rightarrow y = \arcsin(\sin(-z)) = -z$

$\Rightarrow y = -z \Rightarrow -y = z$

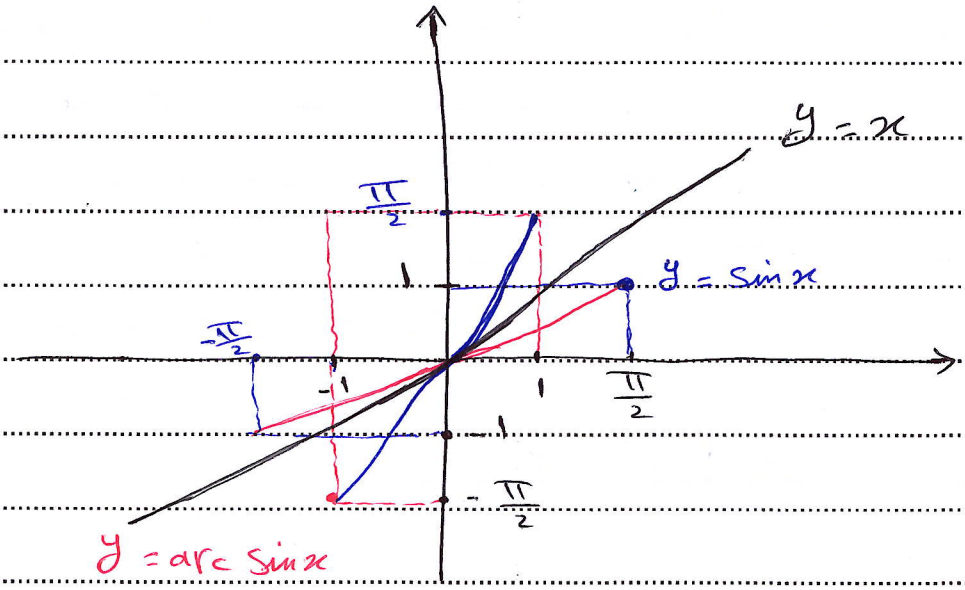
$-\arcsin x = \arcsin(-x)$

$\Leftarrow y = \arcsin x$ فردي

e) نقاط انعدام التابع $y = \arcsin x$

بأخذ sin الطرفين

$\arcsin x = 0 \Rightarrow x = 0$



ملاحظة: الخط البياني للتابع f والخط البياني لتابعه العكسي f^{-1} متناظران بالنسبة للمستقيم $y = x$ (منصف الربع الأول والثالث)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

* التابع العكسي لـ sinx هو تابع متعدد القروع
* sinx وحيد التعيين على أحد المجالات

$$[\pi(k-\tfrac{1}{2}), \pi(k+\tfrac{1}{2})]$$

* من أجل $k=0$ نجد $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ نحصل على الفرع الرئيسي لهذا التابع

نرمز له بـ $y = \arcsin x$

* نحصل على باقي القروع من العلاقة

$$\text{Arc}\sin x = (-1)^k \arcsin x + \pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال: احسب إن أمكن

① $\arcsin(\sin\frac{\pi}{16})$

② $\arcsin(\sin\frac{8\pi}{3})$

الحل:

① بما أن $\frac{\pi}{16} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

فإنه

$$\arcsin(\sin\frac{\pi}{16}) = \frac{\pi}{16}$$

② بما أن $\frac{8\pi}{3} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

فإننا لا نستطيع تطبيق الخاصة

$$\arcsin(\sin x) = x \quad ; \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\frac{8\pi}{3} = \frac{9\pi-\pi}{3} = 3\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\sin(\frac{8\pi}{3}) = \sin(3\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3})$$

و $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow \arcsin(\sin\frac{8\pi}{3}) = \arcsin(\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- تابع التجيب التمامي :

$$y = \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

خصائصه :

1- تابع معرف ومستمر على $\mathbb{R}$

2- تابع دوري دوره 2π

3- له نقاط انقطاع على $\mathbb{R}$ من أجل $\frac{\pi}{2} + \pi k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

4- تابع زوجي خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور الترتيب oy

5- تابع متزايد تماماً على المجال $[0, \pi]$ ومتناقص تماماً على المجال $[-1, 1]$

6- تابع متناقص تماماً على المجال $[\pi, 2\pi]$

* إذا يوجد التابع $\cos x$ تابع عكسي نرمز له بالرمز

$$y = \arccos x$$

خصائصه :

a) $\arccos x : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$

b) تابع معرف ومستمر على مجموعة تعريفه.

c) تابع متناقص على مجموعة تعريفه.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	0	-1

$\arccos(\cos x) = x$

d) تابع زوجي

$$\forall x \in [-1, 1] \Rightarrow -x \in [-1, 1]$$

نفرض $z = \arccos(-x)$

$\Leftarrow \cos z = -x \Leftarrow \cos z = \cos z = x$

ومنه $y = \arccos x = \arccos(\cos z) = z$

أي $= \arccos x = \arccos(-x)$

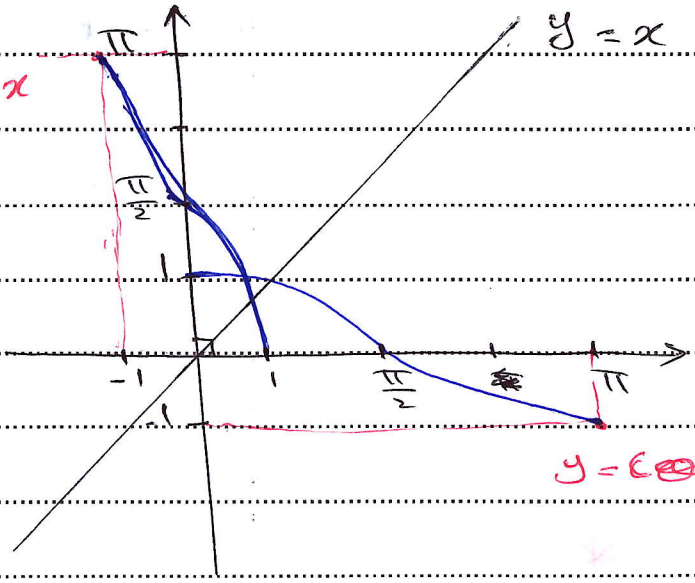
TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

e) نقاط انعدام التابع على المجال $[-1,1]$:

$y = \arccos x$

$\arccos x = 0 \Rightarrow x = 1$ (بأخذ cos)

f) التابع $y = \arccos x$ موجب تماماً على $[-1,1[$



* المنحنى البياني $y = \arccos x$ معرف على $[-1,1]$ ويأخذ قيمه في $[0,\pi]$

* بأخذ المنحنى نحصل عليها من العلاقة

$\text{Arc}\cos x = \pm \arccos x + 2\pi k \quad ; \quad k \in Z$

3- تابع الظل المثلثي :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

يحقق ما يلي :

1) تابع معرف على $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$

2) تابع دوري دوره π

3) تابع فردي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4) تابع معين التعيين على المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ وبأخذ قيمة على المجال $]-\infty,+\infty[$

5- للتابع نقطة انعدام على المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ من أجل $x=0$

6- تابع متزايد تماماً على المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

* إذاً هو صورة تابع عكسي نرمز له بالرمز

$$y=\arctan x$$

يحقق مايلي

a) $\arctan x : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

b) معرف ومستمر على مجموعة تعريفه.

c) تابع فردي أي متناظر بالنسبة لـ o,x

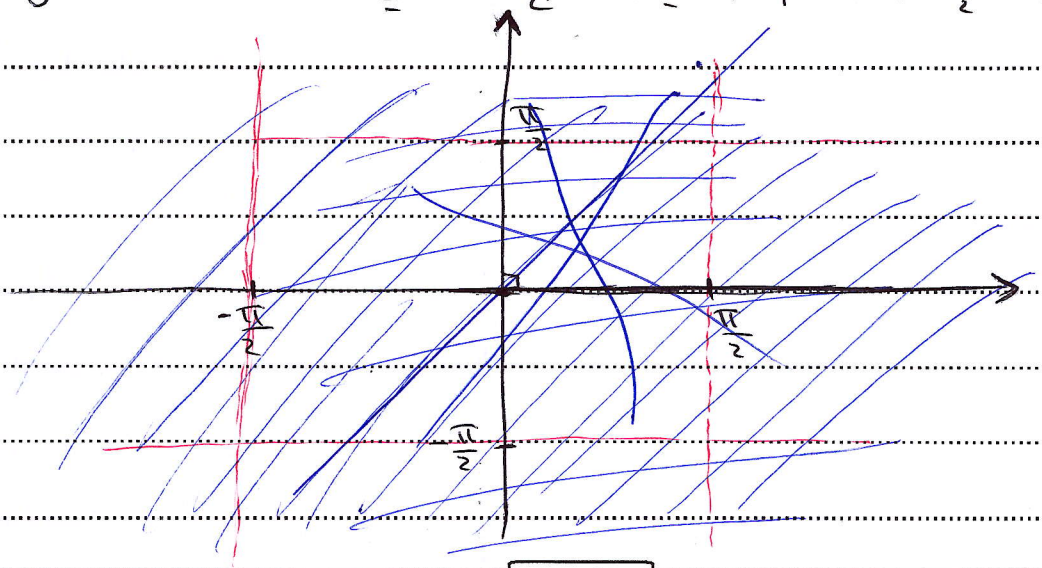
d) نقاط انعدام التابع العكسي

$$\arctan x = 0 \Rightarrow x = \tan(0) = 0$$

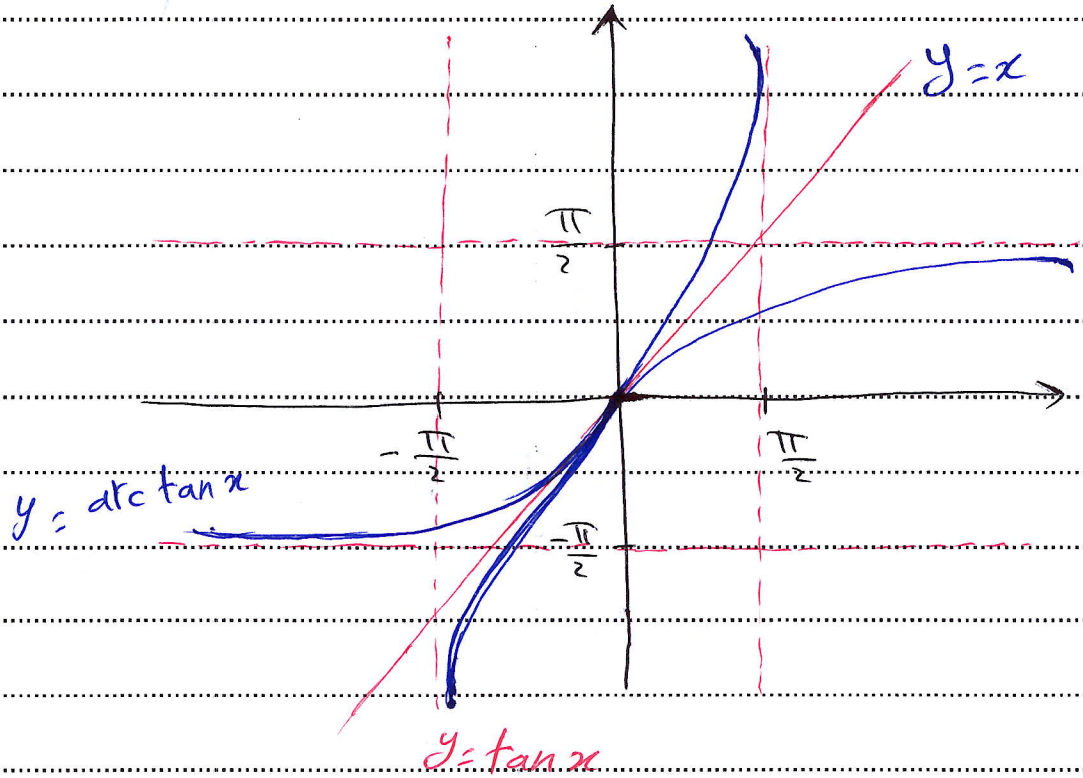
e) * $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

* $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

$y=\arctan x$ مقاربان أفقيان للتابع العكسي $\Leftarrow y=\frac{\pi}{2}$, $y=-\frac{\pi}{2}$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



* باقي الفروع تطبق بالعلاقة:

$$Arc\tan x = \arctan x + \pi k \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

سؤال دورة:

أوجد النهاية التالية:

$$\lim_{x \to 2^-} \arctan\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \arctan\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{t \to -\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$$

$$Arc\tan x = (\arctan x) + \pi k \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4- تابع الظل التمامي :

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{i(e^{ix} + e^{-ix})}{e^{ix} - e^{-ix}}$$

يحقق مايلي :

1) تابع معرف ومستمر على $\mathbb{R} \setminus \{\pi k\}$

2) تابع دوري دوره π

3- تابع وصيي التعيين على المجال $]0, \pi[$ ويأخذ جميع قيمه في المجال $]-\infty, +\infty[$

4- تابع فردي

5- له نقطة انعدام على المجال $]0, \pi[$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

6- تابع متناقص تماماً على المجال $]0, \pi[$

* إذاً يوجد له تابع عكسي نرمز له بالرمز

$$y = \text{arc} \cot x$$

يحقق مايلي :

a) $\text{arc} \cot x : \mathbb{R} \to]0, \pi[$

b) تابع مستمر على مجموعة تعريفه

c) تابع متناقص على مجموعة تعريفه

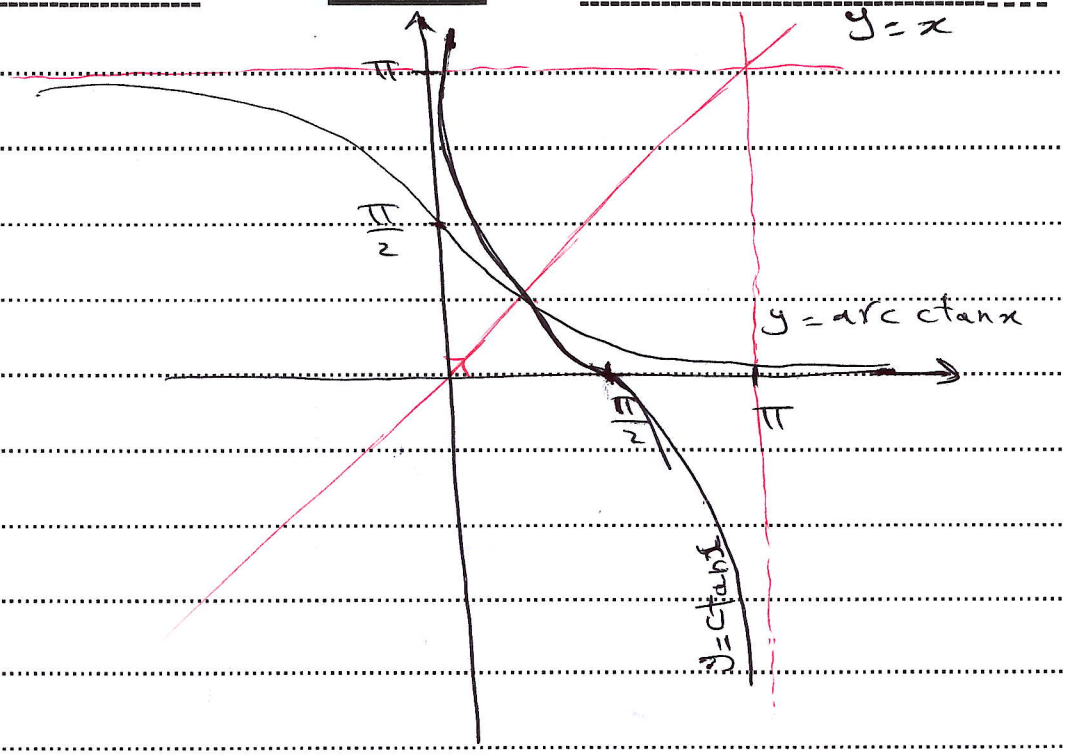
d) تابع فردي

e) * $\lim_{x \to -\infty} \text{arc} \cot x = \pi$

* $\lim_{x \to \infty} \text{arc} \cot x = 0$

$c = 0$ ، $y = \pi$ ، $y = 0$ معادلات أنصاف المستقيمات المقاربة لبيان التابع العكسي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



* يمكن التعبير عن العلاقة

$$\text{Arc ctan}x = \text{arc ctan}x + \pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال:

أوجد القيمة مايلي

(1) $\text{arc sin}\frac{1}{2}$ (2) $\text{arc cos}(-\frac{1}{2})$

(3) $\text{arc tan}(-1)$ (4) $\text{arc ctan}(-1)$

الحل:

(1) $y = \text{arc sin}\frac{1}{2} \Rightarrow \sin y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$

عندما نبحث عن الحل الذي ينتمي للمجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ في المعادلة $\sin y = \frac{1}{2}$

(2) $\text{arc cos}(-\frac{1}{2}) = y$

$\cos y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$

(3) $y = \text{arc tan}(-1)$

$\tan y = -1 \Rightarrow y = -\frac{\pi}{4} \quad ; \quad -\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ب) $y = \operatorname{arc\,ctan}(-1)$

$\operatorname{ctan} y = -1$

$\Rightarrow y = \frac{3\pi}{4} \; ; \; \frac{3\pi}{4} \in]0, \pi[$

مثال 1:

أوجد مجموعة تعريف التابع:

$y = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x\right)$

التابع ln يكون معرفاً عندما

(1) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x > 0$

والتابع $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x$ معرف عندما

(2) $-1 \leq x \leq 1$

من المتراجحة (1) لدينا

$\operatorname{arc\,cos} x < \frac{\pi}{2} \; (=) \; \operatorname{arc\,cos} x < \operatorname{arc\,cos} 0$

وبما أن التابع العكسي $\operatorname{arc\,cos} x$ متناقصاً تماماً $\Leftarrow x > 0$ (3)

من (2) و (3) نجد أن مجموعة التعريف هي المجال $]0, 1]$

التوابع القطعية:

أ) تابع الجيب القطعي

$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

يحقق ما يلي:

أ) تابع معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ وهو تابع فردي في $\mathbb{R}$

ب) تابع مزدوج $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; \operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = \frac{-e^x - e^{-x}}{2}$

$= -\operatorname{sh} x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3- $Sh x = 0$ من أجل $x = 0$

4- $\lim_{x \to -\infty} Sh x = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} Sh x = \infty$

5- التابع متزايد تماماً على المجال $]-\infty, +\infty[$ وبالتالي هو تقابل على المجال $]-\infty, +\infty[$

* أي يوجد له تابع عكسي نرمز له بالرمز

$y = arc\ sh\ x$

* إيجاد التابع العكسي لتابع الجيب القطعي:

$y = Sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

نحل هذه المعادلة بالنسبة لـ x

* نضرب البسط والمقام بـ e^x

$\Rightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$

$\Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$

$\Delta = 4y^2 + 4$

$e^x = \frac{2y \mp 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y \mp \sqrt{y^2+1}$

وبما كان e^x من أجل أي عدد حقيقي x

$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

$\Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

نبدل المتحولات نجد التابع العكسي

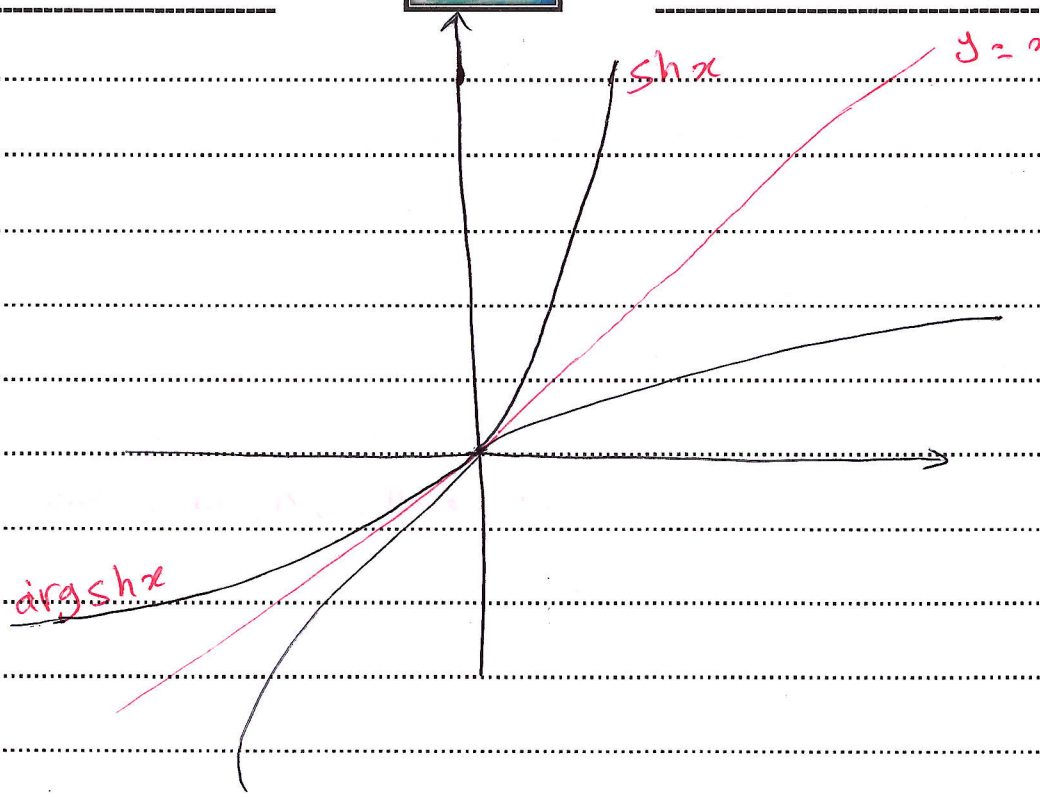
$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

نرمز له بـ $arg\ sh\ x$

التابع العكسي $y = arg\ sh\ x$

* معرف على $\mathbb{R}$ وبأنه متجه في $\mathbb{R}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



2- تابع الجيب القطعي :

$$y = ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

خصائصه :

1- معرف ومستمر على R ومأخذ قيمه على المجال $[1, +\infty[$

2- تابع زوجي لأن

$$\forall x \in R ; ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch x$$

3- $\lim_{x \to +\infty} ch x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} ch x = +\infty$

4- التابع $ch x$ متناقص على المجال $]-\infty, 0[$ ومتزايد على المجال $]0, +\infty[$

5- التابع $y = ch x$ موجبة تماماً على مجموعة تعريفه (ليس له نقاط انعدام)

6- التابع ليس متباين على المجال $]-\infty, +\infty[$

7- التابع متباين على المجال $[0, +\infty[$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* اذاً التابع لهذا التابع عكس نرمز له بالرمز

$$y = \arg ch x$$

$$\arg ch x : [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$$

وهو تابع متزايد تماماً.

إيجاد التابع العكسي للتابع التجيب القطبي:

$$y = ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

نضرب ونقسم بـ e^x

$$y = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 2y e^x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4y^2 - 4$$

$$e^x = \frac{2y \mp \sqrt{y^2 - 1}}{2}$$

$$= y \mp \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

بتبديل المتحولات نجد

$$\arg ch x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$e^x = y \mp \sqrt{y^2 - 1}$ لماذا اخترنا $(+)$ نوضح

مجموع البسط > 0 و $y \in [1, \infty[$ مجموع قيمه $[0, \infty[$ أي تابع اللوغاريتم معرف وهذا يعني مضمون اللوغاريتم أكبر أو يساوي الواحد لذلك أخذنا $(+)$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

≥ 1

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

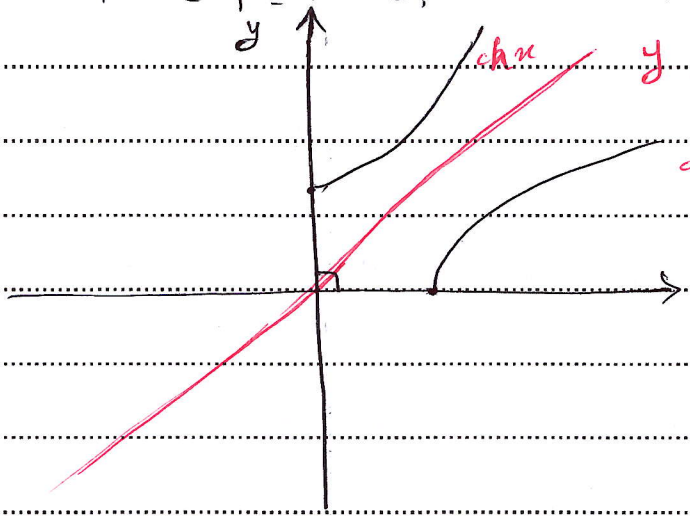
$f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

x	1		∞
f'		$-$	
f	1	$\searrow$	0

$0 < x - \sqrt{x^2-1} \leq 1$ ⟸

$\ln(x - \sqrt{x^2-1}) < 0$ ⟸

وهذا مرفوض كون مجموعة القيم $]-\infty, 0[$



يوجد علاقة بين $ch x$ و $sh x$

① $ch^2 x - sh^2 x = 1$

$\ell_1: \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2}\right) = 1 = \ell_2$

② $sh\,2x = 2\,ch x \cdot sh x$

$\ell_1: \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})$

$= 2 \cdot ch x \cdot sh x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3) $ch x + sh x = e^x$

(4) $ch x - sh x = e^{-x}$

(5) $ch 2x = ch^2 x + sh^2 x$

(6) $ch^2 x = \frac{ch 2x + 1}{2}$

(7) $sh^2 x = \frac{ch 2x - 1}{2}$

(8) $sh(x \mp y) = sh x \cdot ch y \mp sh y \cdot ch x$

(9) $ch(x \mp y) = ch x \cdot ch y \mp sh x \cdot sh y$

-2- تابع الظل القطعي

$$y = th x = \frac{sh x}{ch x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

يحقق ما يلي:

1- معرف ومستمر على $\mathbb{R}$

2- التابع $th x$ فردي

3- $x = 0$ عند $th x = 0$

4- $\lim_{x \to -\infty} th x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x (e^{2x} - 1)}{e^x (e^{2x} + 1)} = -1$

$\lim_{x \to +\infty} th x = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x (1 - e^{-2x})}{e^x (1 + e^{-2x})} = 1$

$\Rightarrow y = 1$ و $y = -1$ مقاربان أفقيان للخط البياني لتابع الظل القطعي

5- تابع متزايد تماماً على $\mathbb{R}$

6- التابع $y = th x$ متصل ويأخذ القيم على المجال $]-1, 1[$ وبما أنه تقابلي على المجال $]-1, 1[$ إذاً يوجد له تابع عكسي نرمز له بالرمز $y = arg th x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تحقق ما يلي :

$\text{argth}x :]-1,1[\longrightarrow]-\infty,\infty[$

تابع متزايد تماماً

إيجاد التابع العكسي لتابع الظل القطعي

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$e^{2x}(1-y) - (1+y) = 0$$

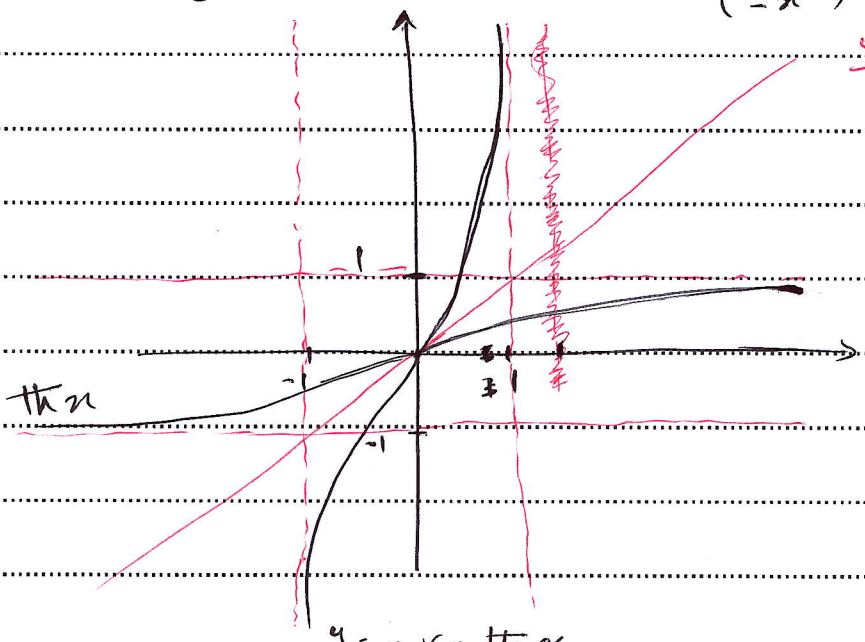
$$e^{2x} = \frac{y+1}{1-y}$$

$$2x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$$

بتبديل المتحولات

$$\Rightarrow y = \text{argth}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4- تابع الظل الهذلي :

$$y = \text{cth}\, x = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

يحقق ما يلي

1) معرف ومستمر على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

2) ليس له نقاط انقطاع

3) تابع فردي

4) $\lim_{x \to -\infty} \text{cth}\, x = -1$ ، $\lim_{x \to +\infty} \text{cth}\, x = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \text{cth}\, x = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \text{cth}\, x = \frac{2}{0^+} = +\infty$

5- التابع $\text{cth}\, x$ متناقص على المجال $]-\infty, 0[$ ومتزايد على المجال $]0, +\infty[$

* متناقص على المجال $]-\infty, 0[$ ومتزايد على المجال $]0, +\infty[$

6- $y = 1$ ، $y = -1$ مقاربان أفقيان

$x = 0$ مقارب شاقولي

7- التابع $y = \text{cth}\, x$ وهو التعيين على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ متزايد تماماً على كل من مجموعة الأعداد

$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

* إذاً يوجد تابع عكسي متناقص تماماً نرمز له بـ

$y = \text{arg cth}\, x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إيجاد التابع العكسي:

نحل المعادلة

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

بالنسبة لـ x

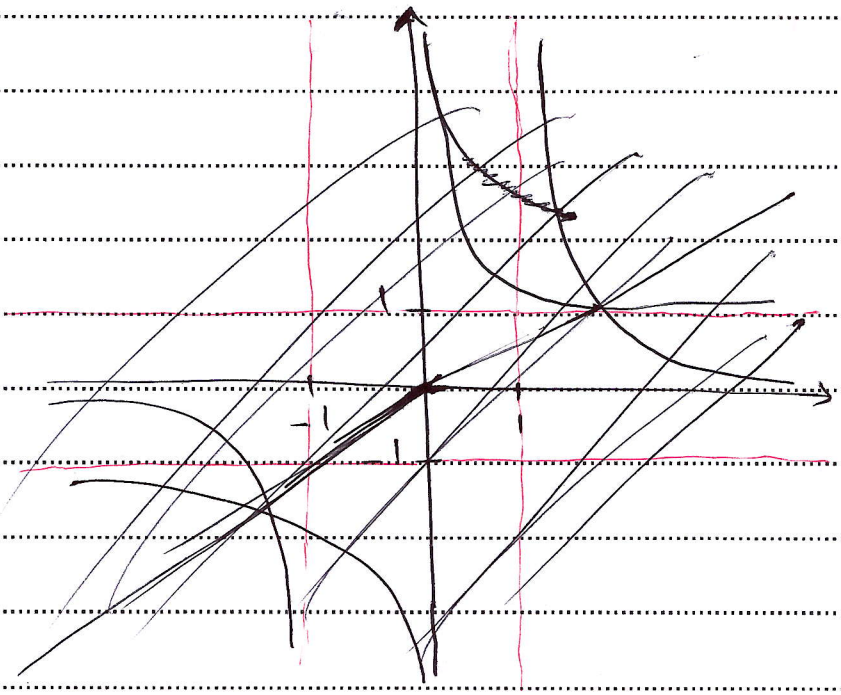
$$e^{2x}(1-y) + (y+1) = 0$$

$$e^{2x} = -\left(\frac{y+1}{1-y}\right) = \frac{y+1}{y-1}$$

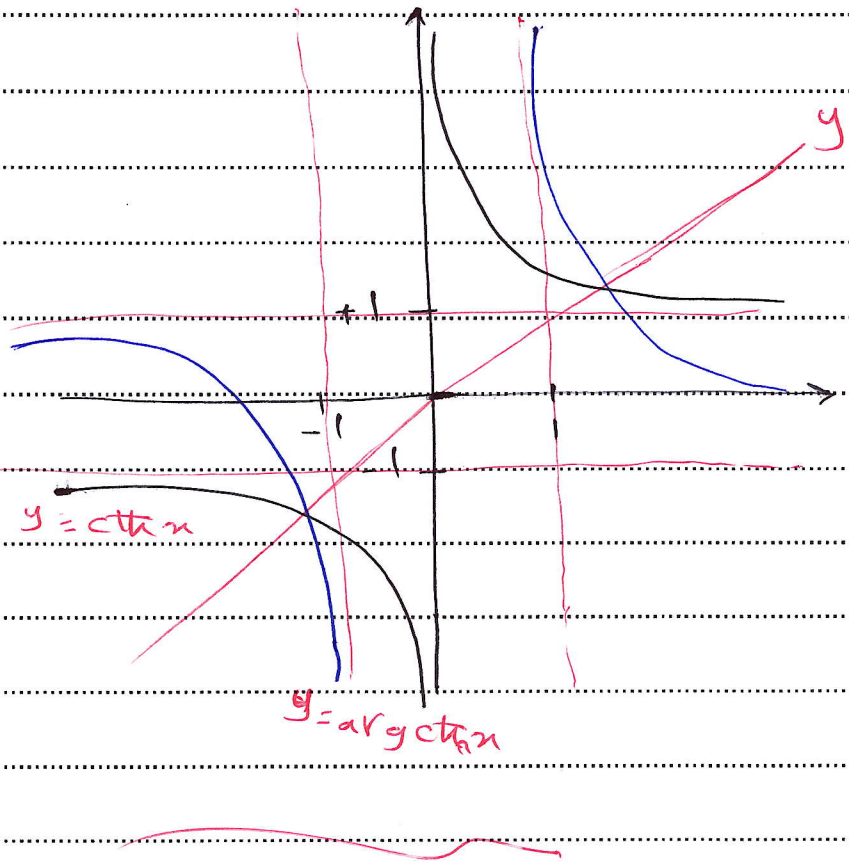
$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

بتبديل المتحولات نجد

$$y = \operatorname{argcth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة


y = x
1
-1
1
y = cth x
y = arg cth x