كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : **السادسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف الجوار لنقطة:

يعرّف جوار النقطة $x_0 \in \mathbb{R}$ بأنه أي مجال اختياري مفتوح

$]x_0 - \delta , x_0 + \delta[$

مركزه x_0 ونصف قطره δ ويمكن أن يعبّر عنه بالشكل $U(x_0, \delta)$

ويمثل مجموعة الأعداد الحقيقية $x \in \mathbb{R}$ بحيث

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

تصنيف جوارات النقطة $x_0 \in \mathbb{R}$ بالتالي:

أ) أي مجموعة تحوي الجوار $U(x_0, \delta)$ هي أيضاً جوار لـ x_0

ب) اجتماع أو تقاطع جوارين للنقطة x_0 هو أيضاً جوار لـ x_0

ج) من أجل أي نقطتين مختلفتين $x \neq y$ فإنه يوجد جوار U للنقطة x وجوار V للنقطة y بحيث $U \cap V = \emptyset$

نهاية تابع عند نقطة:

يفرض لدينا التابع $f(x)$ المعرف على المجموعة X ولتكن x_0 نقطة تنتمي إلى X (قد) ولا تنتمي.

تعريف النهاية:

نقول أن التابع f نهايته عند x_0 تساوي l عندما يسعى x إلى x_0 إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; ; \; |x - x_0| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

عندئذ نكتب

$$f(x) \longrightarrow l \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
$$x \to x_0$$

* تدعى هذه الصيغة بمفهوم كوشي لنهاية تابع عند نقطة

ملاحظة:

إذا كان التابع f معرف عند النقطة x_0 فإن نهاية التابع تساوي قيمة التابع في تلك النقطة

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

مثال:

تحقق أن للتابع

$$f(x) = \frac{2(x^2-1)}{x-1}$$

نهاية مساوية لـ 4 عندما $x \to 1$

الحل:

$$|f(x) - l| = \left|\frac{2(x^2-1)}{x-1} - 4\right|$$

$$= |2x + 2 - 4| = |2x - 2| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} ; \; |x-1| < \delta$$

$$\Longrightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

وعنه

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي كي يكون للتابع $f(x)$ نهاية l في النقطة x_0 أن يكون النهايتان من اليمين ومن اليسار أي

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

تعريف هيني لنهاية تابع في نقطة:

نقول أن التابع $f(x)$ نهايته l في النقطة x_0 إذا كان من أجل أي متتالية عددية (x_n) من X والمتقاربة من x_0 ($x_n \neq x_0$ و $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$) فإن المتتالية $f(x_n)$ متقاربة من l ($\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$)

مبرهنة:

إذا وجد للتابع $f(x)$ المعرف على X نهاية في نقطة x_0 فإن هذه النهاية وحيدة.

مثال:

أدرس وجود نهاية للتابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ في النقطة $x_0 = 0$

الحل:

نأخذ $x_n = \frac{2}{n\pi}$ $\quad n \longrightarrow \infty \Longrightarrow x_n \longrightarrow 0$

$$f(x_n) = \sin \frac{1}{\frac{2}{n\pi}} = \sin \frac{n\pi}{2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\sin\frac{n\pi}{2}$ لا تأخذ قيمة واحدة وإنما قيمتها تتراوح بين 1 أو 0 أو 1-

وبالتالي يوجد متتالية جزئية $\sin\frac{1}{n_n}$ تساوي تماماً 1 وأخرى تساوي تماماً 0 وأخرى تساوي تماماً 1-

إذاً النهاية غير وحيدة للمتتالية

$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ بالتالي ليس للتابع نهاية

تعريف:

نقول إن للتابع $f(x)$ نهاية l عندما x تسعى نحو $+\infty$ إذا تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \; , \; \forall x > M$$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

ونكتب $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$

* نسمي في هذه الحالة المستقيم $y = l$ مقارب أفقي

مثال: وفقاً للتعريف السابق:

للتابع f نهاية l عندما $x \longrightarrow +\infty$ إذا تحقق الشرط

$$\forall (x_n) \; ; \; x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$$

بشكل مشابه نعرف نهاية تابع عند $-\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \; ; \; \forall x < M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

أو:

$$\forall (x_n) \; ; \; x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف:

نقول أن التابع f نهايته في النقطة x_0 مساوية $+\infty$ أو $-\infty$ إذا كان من أجل أي عدد حقيقي M (m) يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون

$f(x) > m$ عند $+\infty$ ، $f(x) < m$ عند $-\infty$

من أجل $0 < |x - x_0| < \delta$

أي:

* عند $-\infty$:

$$\forall m \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < m$$

* عند $+\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

كما لدينا وفقاً لتعريف هاينه:

* عند $-\infty$

$$\forall (x_n) ; \ x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$$

* عند $+\infty$

$$\forall (x_n) ; \ x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$$

ونقول في هذه الحالة $x = x_0$ مقارب شاقولي.

مثال:

ارسم المنحني البياني للتابع $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ يملك مقارب أفقي $y = 2$

لأن $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$

ومقارب شاقولي $x = -2$ لأن $\lim\limits_{x \to -2^{\mp}} f(x) = \pm\infty$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

برهن أن النهاية $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

صحيحة لأنه من أجل $M > 0$ يمكن إيجاد مثل العدد $\delta > 0$ بحيث من أجل جميع x التي تحقق المتراجحة:

$$0 < |x-1| < \delta$$

نجد أن المتراجحة $f(x) > M$ محققة

لنبرهن من أجل ذلك $M > 0$ إذا كان

$$f(x) > M \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > M$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow 0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta$$

أي الشرط الأولي محقق

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta = \frac{1}{\sqrt{M}} > 0$$

و $|x-1| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

وتكون نهاية التابع تساوي $+\infty$

العمليات على النهايات:

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ معرفان على X:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = k$

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \mp g(x)) = l \mp k$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot k$

3- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{k}$; $g(x) \neq 0$ $\forall x \in X$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = k$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ [2]

1- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \pm k$

2- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$

3- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$

4- $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \pm \infty$

x_0 الجوار حول $f(x) \neq 0$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ [3]

1- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = 0$

2- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$

3- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ~~$\neq \varepsilon$~~

$\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm \infty$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ [4]

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \mp g(x)) = \mp \infty$

2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \cdot \infty$ ← ع

3. $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

4. $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{0} = \mp \infty$

وبشكل مشابه إذا كانت

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$

5. $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$ ← ع

* $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$

2- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$

3. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ ← ع

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة:

إذا كانت f_1, f_2, f_3 توابع معرفة على المجموعة X وكانت

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x)$$

وكانت

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_3(x) = l$$

$$\Leftarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = l$$

مبرهنة:

إذا كان التابع المركب $g \circ f$ فإذا كان

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad , \quad \lim_{y \to l} g(y) = k$$

l متكاملة لـ y $\quad$ x_0 متكاملة لـ x

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = k$$

التوابع المتكافئة:

$f(x)$ و $g(x)$ تابعان معرفان بجوار النقطة x_0 نقول عن f و g أنهما متكافئان بجوار x_0 إذا كان

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ونكتب

$$f \sim g$$ بجوار x_0

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خواص التوابع المتكافئة:

1) إذا كان $f \sim g$ في نقطة x_0 فإن $g \sim f$

2) إذا كان $f \sim g$ و $g \sim h$ فإن $f \sim h$

3) إذا كان $f_1 \sim g_1$ و $f_2 \sim g_2$ قابلة في النقطة x_0 لدينا

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$

4) إذا كان $f \sim g$ وكان $\frac{1}{f}$ معرف في جوار x_0 فإن

$$\frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$$

مثال: $\sin x$ و x تابعان متكافئان في جوار $x_0 = 0$ لأن

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مثال: $f(x) = x^3 - 1$ و $g(x) = 3x - 3$

متكافئان في جوار $x = 1$ لأن

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{3x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(x-1)} = 1$$

اللامتناهيات في الصغر (اللامتناهيات في الكبر):

تعريف: نقول عن التابع $f(x)$ أنه لامتناهية في الصغر في جوار النقطة x_0 (x_0 قد لا تنتمي إلى X) إذا كان

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ونقول أنها لا متناهية في الكبر بجوار x_0 إذا كان:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

مثال 1:

$f(x) = \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$ لا متناهي في الصغر في جوار $+\infty$ لأن

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}\right)^x = 0$$

مثال 2:

$f(x) = x^3$ لا متناهي في الكبر بجوار $+\infty$ لأن $\lim_{x \to \infty} f(x) \to +\infty$

التوابع المستمرة:

تعريف:

ليكن $f(x)$ التابع المعرف على المجال I ولتكن $x_0 \in I$ فإذا كان للتابع نهاية في النقطة x_0 مساوية لقيمة التابع في تلك النقطة فإننا نقول إن $f(x)$ تابع مستمر في النقطة x_0 ولتكن

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$* \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon, x_0) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

تعريف هيني للاستمرار:

$$\forall (x_n) : x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x_0)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف:

نقول عن التابع f أنه مستمر على المجال I إذا كان مستمر عند كل نقطة من نقاط هذا المجال

مثال:

ادرس استمرار التابع على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ; x\neq 0\\ 1 & ; x=0\end{cases}$$

التابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ومستمر على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

لدراسة استمرار التابع عند $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0)$$

$\Rightarrow f$ مستمر عند 0 $\Rightarrow f$ مستمر على $\mathbb{R}$

نقاط الانقطاع:

نفرض أن $f(x)$ معرف بجوار x_0

تعريف 1:

إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ موجودة أي

$$\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$$

وكان $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq f(x_0)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عندئذٍ نسمي x_0 نقطة انقطاع من النوع الأول وقابلة للإزالة

إذا كانت $f(x_0)$ موجودة

تعريف 2:

إذا كانت

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

بحيث النهايتين

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

موجودة ومحدودة

عندئذٍ نقول إن x_0 نقطة انقطاع من النوع الأول غير قابلة للإزالة وإنما منقطع بقفزة طولها يساوي

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$ (القفزة)

تعريف 3:

إذا كانت $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ أو $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ غير محدودة أو غير معينة

عندئذٍ نقول إنها نقطة انقطاع من النوع الثاني

مثال:

1) ادرس استمرار التابع f عند $x_0 = \frac{3}{2}$ حيث $f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}$

الحل:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نجد أن النهاية من اليمين واليسار للنقطة $x_0 = \frac{3}{2}$ موجودة ومحدودة

و

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x)$$

$x_0 = \frac{3}{2}$ ⟸

نقطة انقطاع من النوع الأول غير قابل للإزالة وبقفزة طولها 2.

2 ادرس استمرار التابع f عند $x_0 = 0$

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$ حيث

نجد المثال الموجود صفحة 2 لهذه المحاضرة

أن $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة فإن $x = 0$ نقطة انقطاع من النوع الثاني

3 ادرس استمرار التابع

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ على $\mathbb{R}$

التابع f معرف على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ وبالتالي إن وجد نقطة انقطاع مثلاً من أجل

$x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

إذاً $x = 0$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول معاكلة للإزالة لأن النهاية

المستمرة هي

$$h(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خواص التوابع المستمرة :

مبرهنة وايرستراس :

إذا كان $f(x)$ معرف ومستمر على المجال المغلق $[a,b]$ فإن التابع له حد أعلى أصغري وحد أدنى أعظمي

مثال:

$f(x)=x^2$ على المجال $[-2,3]$

التابع معرف ومستمر على هذا المجال

$f(-2)=4,\ f(3)=9$

$\sup f(x)=\max f(x)=9$

$\inf f(x)=\min f(x)=0$

مبرهنة بولزانو كوشي الأولى :

التابع معرف ومستمر على المجال المغلق $[a,b]$ ويفرض أن التابع يأخذ قيمتين مختلفتين بالإشارة عند طرفي المجال $(f(a).f(b)<0)$ عندئذ يوجد نقطة $x_0\in[a,b]$ بحيث يكون $f(x_0)=0$

المعنى الهندسي :

إذا كان المنحني مستمر يمر من جهة إلى الجهة الأخرى بالنسبة لمحور ox فإنه يقطع هذا المحور

مثال:

ادرس وجود حل للمعادلة $f(x)=x-\cos x=0$ على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

التابع f معرف ومستمر على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ولدينا

$f(0)=-1<0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$

وبالتالي اعتماداً على مبرهنة بولزانو كوشي يوجد حل للمعادلة في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة بولزانو كوشي الثانية:

$f(x)$ تابع معرف ومستمر على المجال I (مغلق - غير مغلق - محدود - أو غير محدود)

وإذا كان للتابع عند $x=a$ قيمة $f(a)=A$ وعند $x=b$

قيمة $f(b)=B$

مختلفتان عن بعضهما (غير متساويتان)

عندئذ من أجل c بحيث $A<c<B$

فإنه يوجد نقطة في المجال I مثل x_0 وإن $f(x_0)=c$

الاستمرار المنتظم:

تعريف:

نقول إن التابع $f(x)$ مستمر بانتظام على المجموعة $X \subset Df$ إذا تحقق الشرط

$$*\ \forall \varepsilon>0\ \forall x_1,x_2 \in X\ \exists \delta(\varepsilon)>0$$

و $|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

مثال: أثبت أن التابع $f(x)=4x-1$ مستمر بانتظام على $\mathbb{R}$

الحل:

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين نجد

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|4x_1-1-4x_2+1|$$

$$=4|x_1-x_2|<4\delta=\varepsilon$$

عندئذ نجد أن شرط الاستمرار المنتظم

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X \; \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$

و $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

محققة كما نلاحظ أن δ غير متعلقة بـ x_1 و x_2

ملاحظة:

إذا كان التابع $f(x)$ مستمر بانتظام على المجموعة X فإنها تكون مستمرة على هذه المجموعة

((لكن العكس ليس صحيح بالضرورة))

مثال يوضح ذلك:

إن التابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بالعلاقة $f(x) = x^2$ مستمر على $\mathbb{R}$ ولكن غير مستمر بانتظام عليها

الحل:

لإثبات ذلك يكفي أن نفرض عدد $\varepsilon > 0$ واحد على الأقل لا يحقق شرط الاستمرار المنتظم

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

من أجل العدد $\varepsilon = 1$ لا يمكن إيجاد δ مناسبة تحقق الشرط الآتي

I

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| < 1$$

إذا أخذنا $x_1 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ ، $x_2 = \frac{1}{\delta}$

فإن

$$|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2|$$

$$= \left|\frac{1}{\delta^2} + 1 + \frac{\delta^2}{4} - \frac{1}{\delta^2}\right|$$

$$= \left|1 + \frac{\delta^2}{4}\right| > 1$$

هذه النتيجة تناقض الملاحظة I فالتابع f غير مستمر بانتظام.

مثال:

بين أن التابع $f(x) = \sin 2x$ مستمر بانتظام على المجال $[0, \pi]$

الحل:

$$2\sin(x_1 - x_2)\cdot\cos(x_1 + x_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\left[\sin(x_1 - x_2 - x_1 - x_2) + \sin(x_1 - x_2 + x_1 - x_2)\right]$$

$$= \sin(-2x_2) + \sin(2x_1)$$

$$= \sin 2x_1 - \sin(2x_2)$$

من أجل $x_1, x_2 \in [0, \pi]$ نجد

$$|\sin 2x_1 - \sin 2x_2| =$$

$$= |2\sin(x_1 - x_2)\cdot\cos(x_1 + x_2)|$$

$$= |2\sin(x_1 - x_2)| \cdot |\cos(x_1 + x_2)|$$

$$\leq |2\sin(x_1 - x_2)| \cdot 1$$

$$\sim 2|x_1 - x_2|$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow |\sin 2x_1 - \sin 2x_2| \leq 2|x_1 - x_2| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$

أي يوجد $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ تحقق

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x_1, x_2 \in [0, \pi]$

و $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

أي f مستمر بانتظام على $[0, \pi]$

* شرط الانتقال من الاستمرار إلى الاستمرار المنتظم تضمنه المبرهنة الآتية:

مبرهنة كانتور:

إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال المغلق $[a, b]$ فإنها مستمرة بانتظام على هذا المجال.

مثال:

التابع $f(x) = \sin x$ معرف على $[0, \pi]$ ومستمر عليه ومنه حسب مبرهنة كانتور يكون f مستمر بانتظام على المجال المغلق $[0, \pi]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة