كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الرابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

1- اكتب معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين:

$M_1(5,-2,3)$ و $M_2(3,4,5)$

الحل:

ليكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة من المستقيم المطلوب بالتالي

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-5}{-2}$$

وهذا الشكل الديكارتي

أما المعادلات الوسيطية

$$\frac{x-3}{2} = t \Rightarrow x-3 = 2t \Rightarrow x = 2t+3$$

$$\frac{y-4}{-6} = t \Rightarrow y = -6t+4$$

$$\frac{z-5}{-2} = t \Rightarrow z = -2t+5$$

$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 4-6t \\ z = 5-2t \end{cases}$$ وسيط متحول t

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

2- اكتب معادلة المستقيم التالي بالشكل الديكارتي:

$$L: \begin{cases} 3x+2y+4z+5=0 \\ x-y+2z-4=0 \end{cases}$$

الحل:

نحل جملة المعادلتين السابقتين (نحذف x) أولاً ثم y ثانياً

$$z=\frac{5y+17}{2} \quad , \quad z=\frac{3-5x}{8}$$ نقسم على 5 نقسم على 8

بمساواة قيم z نحصل على معادلة المستقيم بالشكل الديكارتي

$$\frac{x-\frac{3}{5}}{\frac{-8}{5}}=\frac{y+\frac{17}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{z-0}{1}$$

3- اكتب معادلة المستقيم المار من النقطة $M_1(2,1,-3)$ علماً أن زوايا التصيب له هي $\alpha=90^\circ, \beta=30^\circ, \gamma=60^\circ$

الحل:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}$$

$$\cos\alpha=\cos 90^\circ=0$$

$$\cos\beta=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\gamma=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{z+3}{\frac{1}{2}}$$

أي

$$x=2$$

$$y-1=\sqrt{3}(z+3)$$

$\Rightarrow$ معادلة المستقيم المطلوب هي الفصل المشترك لمقاطع المستويين

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x - 2 = 0$

$y - \sqrt{3}z - 3\sqrt{3} - 1 = 0$

4) أوجد معادلة المستقيم L المار بالنقطتين $M_1(1, 2, -3)$ و $M_2(6, -5, 1)$ بأكثر من شكل الكتابة جميعاً

الحل:

نكتب أولاً معادلة المستقيم بالشكل الديكارتي

بفرض $M(x, y, z)$ نقطة متحولة من المستقيم L

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+3}{4}$$

(1) (2) (3)

أما المعادلات الوسيطية

$x = 1 + 5t$

$y = 2 - 7t$

$z = -3 + 4t$

أما معادلة المستقيم كفصل مشترك لمتقاطع المستويين فهي

من المعادلتين (1) و (2) نحصل على معادلة المستوي الأول

من المعادلتين (2) و (3) نحصل على معادلة المستوي الثاني

أي أن

$$L: \begin{cases} P_1 = -7x - 5y + 17 = 0 \\ P_2 = 4y + 7z + 13 = 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

5- بين إذا كان المستقيمان التاليان متعامدان

$$L_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

$$L_2 : \frac{x+6}{7} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3}$$

الحل:

إن مركبات المتجه الموازي للمستقيم الأول هي $\vec{v_1}(1,-1,1)$

ومركبات المتجه الموازي للمستقيم الثاني هي $\vec{v_2}(7,4,-3)$

نلاحظ أن

$$\vec{v_1}.\vec{v_2} = (1)(7)+(-1)(4)+(1)(-3)=0$$

$\Rightarrow$ المستقيمان متعامدان

6- أوجد المعادلات المعيارية والبارامترية للمستقيم L المار بالنقطة $M_1(1,2,3)$ والموازي للمتجه

$$\vec{V} = \overset{p}{2}\vec{i} + \overset{q}{3}\vec{j} + \overset{r}{1}\vec{k}$$

وعين نقطة تقاطعه مع المستوي oxy

* إن المعادلة الديكارتية لـ L

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$$

* أما المعادلات المعيارية

$$x = 1+2t$$

$$y = 2+3t$$

$$z = 3+t$$

يقطع المستقيم المستوي oxy عند $z=0$ بالتعويض في المعادلات المعيارية:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x = -5$

$y = -7$

$z = 0$

$\Rightarrow$ إحداثيات نقطة التقاطع مع المستوي oxy هي $(-5,-7,0)$

7 أوجد المعادلات البسيطة للمستقيم L المعطى كفصل مشترك لمتقاطع مستويين

$$L = \begin{cases} P_1 = x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ P_2 = 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$$

الحل:

إن الناظم على المستوي الأول $\vec{N_1}(1,-2,3)$

والناظم على المستوي الثاني $\vec{N_2}(3,2,-5)$

فيكون منحنى L هو

$$\vec{N} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2}$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = (4, 14, 8)$$

لنوجد الآن إحداثيات لنقطة ما من L ولتكن M_1 بوضع $z = 0$ (مثلاً)

في معادلتي المستويين السابقين

$$3x + 2y - 4 = 0$$

$$x - 2y - 4 = 0$$

$$x = 2, \quad y = -1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$M_1(2,-1,5)$

معادلة المستقيم المار بالنقطة M_1 والموازي للمتجه N

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}$$

8- بين فيما إذا كان المستقيمان التاليان يقعان في مستوٍ واحد

$$L_1 : \begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$L_2 : \begin{cases} 3x - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

لكي يقع المستقيمان في مستوٍ واحد يجب أن يكون المحدد التالي مساوياً الصفر

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$\Delta = 0$

المستقيمان يقعان في مستوٍ واحد

9- أوجد الوضع النسبي للمستقيمين

$$L_1 : \begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} P_1 : 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ P_2 : x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

نكتب معادلة L_1 بالشكل الديكارتي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}$$

ولكتابة L_2 بالشكل الديكارتي نحل المعادلتين بالنسبة لـ x و y مثلاً

$$x = 9(z+3)$$

$$y = 5(z+3)$$

$\Leftarrow$ المعادلة الديكارتية

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}$$

وهي معادلة المستقيم L_1 نفسر لذا فإن L_1 و L_2 منطبقان

$$L_1 = L_2$$

10- أوجد بعد النقطة $M_2(-2,3,4)$ عن المستقيم التالي:

$$L = \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

$$D = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

من معادلة المستقيم نجد أن النقطة $M_1(3,-1,1)$

تقع على المستقيم L والمتجه $\vec{v}(1,2,1)$ يوازي المستقيم L وبالتالي

$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 8\vec{j} + 14\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{v}| = \sqrt{4+64+196} = 2\sqrt{66}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$D = \frac{2\sqrt{66}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{11}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تطبيق مستقيم بالنسبة لمستوي :

ليفرض أن المستقيم L معطى كفصل مشترك للمستويين

$$L : \begin{cases} P_1 : p_1 x + q_1 y + r_1 z + d_1 = 0 \\ P_2 : p_2 x + q_2 y + r_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

وليكن معادلة المستوي

$$P : px + qy + rz + d = 0$$

نفرض M_1 و M_2 نقطتان متناظرتان بالنسبة لـ P

(المستوي P عمودي على $[M_1 M_2]$ في منتصفها)

وليكن $\vec{N}$ المتجه الناظم على المستوي P

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{N}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{p} = \frac{y_2 - y_1}{q} = \frac{z_2 - z_1}{r} \quad \Leftarrow \quad (1)$$

ولدينا M منتصف $M_1 M_2$ ننتمي لـ P من أجل كتابة معادلة

$$p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + q\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + r\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + d = 0$$

نحل (1) و (2) حل مشترك نحصل على معادلات L

مثال :

ليكن المستوي P

$$P : x + 2y + 3z - 1 = 0$$

أوجد معادلة المستقيم L الذي يناظر L بالنسبة لـ P

$$L : \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

بفرض $M_1(x_1, y_1, z_1)$

نقطة من Δ وتظيرتها $M_2(x_2, y_2, z_2)$ بالنسبة للمستوي P

عندئذ

(1) $$\frac{x_2 - x_1}{1p} = \frac{y_2 - y_1}{2q} = \frac{z_2 - z_1}{r3}$$

M منتصف $[M_1 M_2]$ وإحداثياتها

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

ولكن M تنتمي لـ P

أي تحقق معادلته

نعوض في معادلة المستوي P

$$\frac{x_1+x_2}{2} + y_1 + y_2 + \frac{3}{2}(z_1+z_2) - 1 = 0$$

(2) $$x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 + 3z_1 + 3z_2 - 2 = 0$$

لحل (1) و (2) نحصل على:

نوحد x_1 و y_1 و z_1 بدلالة x_2 و y_2 و z_2 ونعوض في L

من (1)

$$x_1 = x_2 - \frac{1}{3}z_2 + \frac{1}{3}z_1$$

$$y_2 - y_1 = \frac{2}{3}z_2 - \frac{2}{3}z_1$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2 - \frac{2}{3}z_2 + \frac{2}{3}z_1$$

نعوض في (2)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$x_2 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{1}{3}z_1 + x_2 + 2y_2 - \frac{4}{3}z_2 + \frac{4}{3}z_1 + 2y_2 + 3z_1 + 3z_2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x_2 + \frac{4}{3}z_2 + \frac{14}{3}z_1 + 4y_2 - 2 = 0$$

$$\frac{14}{3}z_1 = -2x_2 - \frac{4}{3}z_2 - 4y_2 + 2$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{-6}{14}x_2 - \frac{4}{14}z_2 - \frac{12}{14}y_2 + \frac{6}{12}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{14} + \frac{1}{14}(12x_2 - 4y_2 - 6z_2)$$

$$y_1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{7}(-2x_2 + 3y_2 - 6z_2)$$

$$z_1 = \frac{6}{14} + \frac{1}{14}(-6x_2 - 12y_2 - 4z_2)$$

نعوض x_1 و y_1 و z_1 في معادلتي L_1 فنحصل على معادلتي x بـ L_1

$$L_1 = \begin{cases} 11x_2 + 8y_2 - 16z_2 + 3 = 0 \\ 11x_2 + 13y_2 + 2z_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z