كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

أحسب قيمة المحدد:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1^{n-1} & 1 \\ -b & a & a & \cdots & a & a \\ -b & -b & a & \cdots & a & a \\ & & -b & & & \\ -b & -b & -b & \cdots & a & a \\ -b & -b & -b & \cdots & -b & a \end{vmatrix}$$

* نضرب العمود الأول بـ (1-) ونجمعه للعمود الثاني،
ونضرب العمود الثاني بـ (1-) ونجمعه للعمود الثالث،
وهكذا حتى العمود قبل الأخير نضربه بـ (1-) ونجمعه للعمود الأخير n
فنحصل على المحدد Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & a+b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b & 0 & a+b & \cdots & & \\ -b & & & & & \\ -b & 0 & 0 & \cdots & a+b & 0 \\ -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\Delta = |x(a+b)\,x(a+b)\,\underbrace{\cdots\cdots}_{n-1}\,x(a+b)$$

$$= (a+b)^{n-1}$$

وظيفة

الجواب لازم يطلع $n(x)^{n-1}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -x & x & 0 & & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -x & 0 & 0 & & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & & 0 & x \end{vmatrix}$$

الخاصية الثامنة

$|I_n| = 1$ محدد مصفوفة واحدية مرتبتها الكاملة

المرتبة n مرفوعة لأس الواحد

تعريف:

ليكن $A = [a_{ij}]_{n*n}$ مصفوفة، ولنحذف منها السطر (i) والعمود (j) فنحصل على المصفوفة M_{ij} الجزئية من الرتبة $n-1$ والتي من الشكل $(n-1)\times(n-1)$

نسمي معين هذه المصفوفة $|M_{ij}|$ محدد صغير العنصر a_{ij} ونرمز له بـ Δ_{ij}

مثال

ليكن $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Delta 12 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$

$\Delta 13 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$\Delta 21 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$\Delta 22 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$\Delta 23 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$\Delta 31 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$\Delta 32 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 8$

$\Delta 33 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20$

Δij

* تعريف: ليكن $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ نسمي محدد العنصر (a_{ij}) مضروباً بالعدد $(-1)^{i+j}$ بالمتمم الجبري للعنصر a_{ij} ونرمز له A_{ij}

كما نسمي المصفوفة $[A_{ij}]$ بمصفوفة المتمات الجبرية للمصفوفة A

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta ij$

$\Delta 11 = (-1)^{1+1}(-1) = -1$

$D12 = (-1)^{1+2}(-7) = (-1)(-7) = +7$

$\vdots$

$A_{33} = (-1)^{3+3}(-20) = -20$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خلاصة المحددات الجبرية:

$$\begin{bmatrix} +(-1) & -(-7) & +(5) \\ -(3) & +(-1) & -(5) \\ +(4) & -(8) & +(20) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & +7 & 5 \\ +3 & -1 & +5 \\ +4 & -8 & -20 \end{bmatrix}$$

* تعريف

ليكن $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ عندئذ يعين A بأنه مجموع جداءات عناصر أحد أسطرها (أو أعمدتها) في محاقاتها الجبرية فمثلاً لو اخترنا السطر الرقم i

$$|a| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}\cdot A_{in}$$

مثال

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

نختار السطر الأول

$$|A| = \underset{a_{11}\ A_{11}}{3}(-1) + \underset{a_{12}\ A_{12}}{(4)}(7) + \underset{a_{13}\ A_{13}}{(-1)}(5)$$

$$-3+28-5=20$$

نختار السطر الثاني

$$|A| = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= (5)(3) + (0)(-1) + (1)(5)$

$= 15 + 0 + 5 = 20$

نختار السطر الثالث

$|A| = +2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2(4) - 1(8) - 1(-20) = 20$

مبرهنة

ليكن A و B مصفوفتين مربعتين من الشكل $n \times n$ عندئذ

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

مثال

$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$A \cdot B \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

$|A \cdot B| = -20 - (-5) = -15$

$|A| = 2 - (-3) = 5$

$|B| = -3$

$-15 = -15$

$|AB| = |A| \cdot |B|$

تعريف: نقول أن $A_{n \times n}$ أنها شاذة (غير نظامية) إذا كان محدد يساوي الصفر أي

$|A| = 0$

تعريف: نقول أن $A_{n \times n}$ قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة مربعة مماثلة الشكل $B_{n \times n}$ بحيث

$A \cdot B = B \cdot A = I_n$

نرمز لمقلوب A بـ A^{-1}

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: إذا ملكت A معكوساً فإنه وحيد

البرهان

نفرض جدلاً أن للمصفوفة A المصفوفتان B و C

عندئذ $B \cdot A = A \cdot B = I_n = A \cdot C = C \cdot A$

$$B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C$$

$$= C$$

$\therefore B = C$ يوجد معكوس وحيد للمصفوفة A

مبرهنة لتكن $A = [a_{ij}]$ عندئذ

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = |A| \cdot I_n$$

حيث $|A|$ محدد A و $\tilde{A}$ هي منقول مصفوفة المتمات الجبرية

نتيجة

$$\frac{1}{|A|} \cdot A \cdot \tilde{A} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} \cdot A = I_n$$

$\rightarrow B$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

وجدنا أن $|A| = 20$

وجدنا أن مصفوفة المتمات الجبرية

$$\begin{vmatrix} -1 & +7 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & -8 & -20 \end{vmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & -8 \\ 5 & 5 & -20 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{-20} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & -8 \\ 5 & 5 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{-1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{4}{20} \\ \frac{7}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-8}{20} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix}$$

مثال: لتكن $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ أوجد B^{-1}

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 20 = +5$$

مصفوفة المرافقات الجبرية

$$\begin{bmatrix} +5 & -5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$\Delta 11 = 5$

$\Delta 11 = 5$

$\Delta 21 = 4$

$\Delta 22 = -3$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

نبادل بين عناصر القطر الرئيسي

نبادل عناصر القطر

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ -1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

ملاحظة

لإيجاد معكوب مصفوفة مربعة من الرتبة 2 × 2 يكون

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$$

حيث $\tilde{A}$ هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة A بمبادلة عناصر القطر الرئيسي مع إشارة القطر الثانوي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z