كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

- حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$

اذا كانت : $m = n$

أ) $\Delta \neq 0$ ← الجملة حل وحيد وهو الحل الصفري

أي أن : $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

ب) $\Delta = 0$ ← الجملة عدد لانهائي من الحلول

- في الحالة العامة : نطبق نظرية غاوص جوردان ونناقش الحالات :

أ) $\alpha \neq 0 = 0 = \cdots = 0$ ← الجملة مستحيلة الحل

ب) اذا حولنا مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة مثلثية :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{22} \cdots & b_{2n} & 0 \\ & & b_{mn} & 0 \end{array}\right]$$

← الجملة حل وحيد

ج) اذا تحولت مصفوفة الأمثال إلى مصفوفة شبه مخزنية

← الجملة عدد لانهائي من الحلول

ويكون لدينا متحولات رئيسية تساوي عدد أسطر المصفوفة شبه المخزنية غير المعدومة .

والمتحولات الأخرى تكون متحولات حرة نفرضها $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r)$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

حيث تكتب المتحولات الرئيسية بدلالة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_r x_{n-r}$$

نسمي $x_1, x_2, \ldots, x_{n-r}$ حلول أساسية (الرئيسية)

كل حل للجملة يكتب بدلالة الحلول الأساسية

مثال: أوجد عبارة الحل العام للجملة، ثم عين الحلول الأساسية.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

الحل: عدد المجاهيل $n=4$ ، عدد المعادلات $m=2$ ، $n > m$ ⇐ الجملة عدد حلولها نهائي

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \overset{i_1 \leftrightarrow i_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-3i_1 + i_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 14 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -4x_2 + 14x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

يكون x_1, x_2 متحولات رئيسية

x_3, x_4 متحولات حرة

نفرض $x_3 = \alpha$ ، $x_4 = \beta$

$$x_2 = \frac{14x_3 - 5x_4}{4} = \frac{7}{2}\alpha - \frac{5}{4}\beta$$

نعوض في المعادلة الأولى:

$$x_1 = -x_2 + 4x_3 - 2x_4$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= -\frac{7}{2}\alpha + \frac{5}{4}\beta + 4\alpha - 2\beta$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\beta$$

الحل بشكل عام:

$$x_1 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\beta$$

$$x_2 = \frac{7}{2}\alpha - \frac{5}{4}\beta$$

$$x_3 = \alpha$$

$$x_4 = \beta$$

الحلول الأساسية:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\beta \\ \frac{7}{2}\alpha - \frac{5}{4}\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{7}{2}\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}\beta \\ -\frac{5}{4}\beta \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نسمي:

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حلول رئيسية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: حل جملة المعادلات الخطية متجانسة حسب قيم λ

$$x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 0$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[-i_1 + i_3]{-2i_1 + i_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 6 & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{i_2}{7}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{-6i_2 + i_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5+\lambda \end{bmatrix}$$

نناقش:

أ) $-5 + \lambda \neq 0 \Leftarrow \lambda \neq 5$

فصل لها مصفوفة مثلثية عليا $\Leftarrow$ الجملة حل وحيد هو الحل الصفري

$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

ب) $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة سلمية مختزلة

$\Leftarrow$ الجملة تقبل عدد لانهائي من الحلول

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

المجهولات الرئيسية x_1, x_2 والمتحول الحر x_3 نفرضه $x_3 = \alpha$

$$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3 = -\alpha$$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 3x_2 + x_3 = -3\alpha + \alpha = -2\alpha$$

الحل بشكل عام:

$$x_1 = -2\alpha$$

$$x_2 = -\alpha$$

$$x_3 = \alpha$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل الأساسي:

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الأشعة الذاتية والقيم الذاتية لمصفوفة مربعة:

تعريف: لتكن لدينا مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ فوق الحقل القياسي R

نقول عن العدد السلمي $\lambda \in R$ أنه قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وجدت مصفوفة عمود X من السعة $n \times 1$ غير معدومة بحيث: $AX = \lambda X$

ونسمي: X الشعاع الذاتي الموافق للقيمة λ

تعريف: لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ولتكن λ قيمة ذاتية لها

نسمي $A - \lambda I$ المصفوفة المميزة للمصفوفة A، ونرمز لمحدد هذه المصفوفة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالرمز $f(\lambda)$ ذي: $f(\lambda) = |A - \lambda I|$

وهو كثير حدود بالنسبة لـ λ من الرتبة n

تسمى كثير حدود المميز للمصفوفة A

وتسمى: $|A - \lambda I| = 0$ المعادلة المميزة للمصفوفة A

- لإيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمصفوفة مربعة:

1) نكتب المصفوفة المميزة للمصفوفة A:

$$A - \lambda I$$

2) نحل المعادلة: $f(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

فتكون الحلول: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$

3) لإيجاد الأشعة الذاتية الموافقة لقيمة ذاتية:

نعوض هذه القيمة في المصفوفة المميزة ونحل جملة المعادلات الموافقة فنحصل على الأشعة الذاتية.

مثال: أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}2-\lambda & 2 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{-c_2+c_3}\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 0 & -1+\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

بفك المحدد حسب العمود الأول:

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ -1+\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\cdot 1\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1+\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3+1-\lambda)-(2-2\lambda+1-\lambda)=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)-(-3\lambda+3)=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1)+3(\lambda-1)=0$$

$$(\lambda-1)(-\lambda^2+6\lambda-8+3)=0$$

$$-(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5)=0$$

$$-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$$

$$-(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$$

∴ إما: $\lambda=1$ جذر مضاعف، أو $\lambda=5$

القيم الذاتية: $\lambda=1$ ، $\lambda=5$

إيجاد الأشعة الذاتية الموافقة لـ: $\lambda=1$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$$

نلاحظ أن الجملة عبارة عن معادلة: $x_1+2x_2+x_3=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبالتالي لدينا متحول رئيسي وهو x_1

ومتحولان حران: x_2, x_3

نفرض أن: $x_2 = \alpha$ ، $x_3 = \beta$

$\Rightarrow x_1 = -2\alpha - \beta$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مع الأشعة الذاتية لـ: $\lambda = 1$ هي:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إيجاد الأشعة الذاتية الموافقة لـ: $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{3c_1 + c_2 \\ -c_1 + c_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \overset{c_2 + c_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

المتحولات الرئيسية x_1, x_2

المتحول الحر x_3 نفرضه $x_3 = \alpha$

$-4x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = \alpha$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نفرض: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

$x_1 - 2\alpha + \alpha = 0 \Rightarrow x_1 = \alpha$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

متجه الشعاع الذاتي الموافق للقيمة $\lambda = 5$ هو:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال: أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل: نكتب المصفوفة المميزة:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -8 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

ننشر حسب السطر الأول:

$$(2-\lambda)[4 - 4\lambda + \lambda^2 + 1] + 8[-2 + \lambda] = 0$$

$$(2-\lambda)[5 - 4\lambda + \lambda^2 - 8] = 0$$

أي أن $\lambda = 2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي $\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 28$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7}$

$\lambda_2 = 2 - \sqrt{7}$

بما أن القيم ذاتية

من أجل $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & -8 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادلة المعادلة:

$-8x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$-x_1 + x_3 = 0$

$-x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

متحولات رئيسية x_1, x_2 والمتحول الحر x_3 نفرض $x_3 = \alpha$

$\Rightarrow x_1 = x_3 = \alpha$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المتجاه الذاتي الموافق:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

والقيم الباقية $\lambda_1 = 2 + \sqrt{7}$ ، $\lambda_2 = 2 - \sqrt{7}$ كل بنفس الطريقة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z