كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : احتمالات واحصاء

المحاضرة : الخامسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

متغير عشوائي مستمر : $f(x,y)$

- لكي يكون تابع كثافة أي حساب ما يكون تابع كثافة :

① $f(x,y) \geq 0$ محقق دوماً

② $\int\int f(x,y)\,dx\,dy = 1$

- لإيجاد دالة التوزيع :

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

بدل x نضع u ، بدل y نضع v

تمرين ① - ليكن التابع $f(x,y)$ المعرف بالعلاقة :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(x+4y) & ; \ 0 \leq x \leq 1 \\ & \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب :

1) أثبت أن التابع $f(x,y)$ هو تابع كثافة احتمالية مشترك

2) أوجد تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما

3) أوجد تابع الكثافة كل من X ، Y

4) أوجد تابع التوزيع لـ X

الحل :

1) ① $f(x,y) \geq 0$ محقق دوماً

② $\int_0^1\int_0^1 \frac{3}{4}x(x+4y)\,dx\,dy \stackrel{?}{=} 1$

$$\frac{3}{4}\int_0^1\int_0^1 x^2+4xy\,dx\,dy=$$

$$\frac{3}{4}\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+2x^2y\right]_0^1 dy=$$

$$\frac{3}{4}\int_0^1 \frac{1}{3}+2y\,dx=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}y+y^2\right]_0^1=$$

$$\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}+1-0\right]=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1$$

$f(x,y)$ ← تابع كثافة احتمالية مشترك.

2) $$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y \frac{3}{4}u(u+4v)\,du\,dv=$$

$$\frac{3}{4}\int_0^x\int_0^y u^2+4uv\,du\,dv=$$

$$\frac{3}{4}\int_0^y\left[\frac{u^3}{3}+2u^2v\right]_0^x dv=$$

$$\frac{3}{4}\int_0^y \frac{x^3}{3}+2x^2v\,dv=\frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}v+x^2v^2\right]_0^y=$$

$$\frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}y+x^2y^2\right]\Rightarrow F(x,y)=\frac{1}{4}x^3y+\frac{3}{4}x^2y^2$$

3) $$f(x)=\frac{dF(x,y)}{dx}=\frac{3}{4}x^2y+\frac{6}{4}xy^2$$

$$f(y)=\frac{dF(x,y)}{dy}=\frac{1}{4}x^3+\frac{6}{4}x^2y$$

4) $$F(x)=\int_0^x\int_0^1 \frac{3}{4}u(u+4y)\,du\,dy=$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int_0^x \int_0^1 \left(\frac{3}{4}u^2 + 3uy\right) du\, dy =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{4}u^3 + 3y\frac{u^2}{2}\right]_0^x dy = \int_0^1 \frac{1}{4}x^3 + 3y\frac{x^2}{2} dy =$$

$$\left[\frac{1}{4}x^3 y + \frac{3}{4}y^2 x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

تمرين [2] ـ بفرض أن:

$$f(x,y) = \begin{cases} K(6+x-y) & ; 0 \le x \le 3 \\ & 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب: 1) أوجد K حتى يكون $f(x,y)$ تابع كثافة احتمالية مشترك

2) أوجد $f(x)$

الحل:

1) ① $f(x,y) \ge 0$ محققة دوماً

② $\int_0^3 \int_0^2 K(6+x-y)\, dx\, dy = 1$

$$K\int_0^2 \left[6x + \frac{x^2}{2} - yx\right]_0^3 dy = 1$$

$$K\int_0^2 18 + \frac{9}{2} - 3y\, dy = 1 \Rightarrow K\int_0^2 \frac{45}{2} - 3y\, dy = 1$$

$$K\left[\frac{45}{2}y - \frac{3y^2}{2}\right]_0^2 = 1 \Rightarrow K[45-6] = 1$$

$$39K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{39}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2) $f(3) = \int_0^3 \frac{1}{39}(6 + x - y)\,dx =$

$$\frac{1}{39}\left[6x + \frac{x^2}{2} - yx\right]_0^3 = \frac{1}{39}\left[18 + \frac{9}{2} - 3y\right]$$

$$= \frac{1}{39}\left[\frac{45}{2} - 3y\right]$$

تمرين (3) - ليكن لدينا :

$f(x,y) = K(x+y)$; $x = 1, 2, 3$

$y = 1, 2, 3$

المطلوب : أوجد K ؟

الحل :

① $f(x,y) \geq 0$ وهذا محقق

② $\sum f(x,y) = 1$

$f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) + f(2,1) + f(2,2) + f(2,3) + f(3,1) + f(3,2) + f(3,3) = 1$

$\Rightarrow 2K + 3K + 4K + 3K + 4K + 5K + 4K + 5K + 6K = 1$

$\Rightarrow 36K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{36}$

تمرين (4) - لدينا تابع توزع احتمالي منفصل مشترك معرف بالشكل :

جدول بالصيغة التالية

المطلوب : أوجد : $F(1,1)$

$F(-2,1)$

$F(3.5, 5)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

Y \ X	0	1	2	توزيع Y
0	0.12	0.06	0.12	0.3
1	0.2	0.1	0.2	0.5
2	0.08	0.04	0.08	0.2
توزيع X	0.4	0.2	0.4	1

1) $F(1,1)$

$p(X \le 1, Y \le 1)$

$= f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1)$

$= 0.12 + 0.2 + 0.06 + 0.1 = 0.38$

2) $F(-2,1)$

$p(X \le -2, Y \le 1) = 0$

لأنه لا يوجد في الجدول قيم لـ X أصغر من 2-

3) $F(3.5, 5)$

$p(X \le 3.5, Y \le 5) = 1$

لأنه كامل الجدول

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة