كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : الخامسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مثال: هل يمكن تطبيق نظرية رول للدوال الآتية، إذا أمكن ذلك أوجد النقاط التي تنتمي إلى المجال المطلوب.

a) $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x + 1$; $[-1,1]$

b) $f(x) = 4x^3 + x^2 + 4x + 1$; $[-1,1]$

الحل: الدالة f تحقق a:

$f(a) = f(b)$ حيث $c \in R$

$f(-1) = f(1) = 2$

$\Rightarrow$ يمكن تطبيق نظرية رول

فيجد c التي تحقق

$f'(c) = 0$

$12x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow 6x^2 + x - 2 = 0$

نحلها بطريقة Δ $\Leftarrow$

$x_1 = \frac{1}{4} \in]-1,1[$, $x_2 = -\frac{1}{2} \in]-1,1[$

الدالة لا تحقق b:

$f(-1) \neq f(1)$

لا يمكن تطبيق نظرية رول نتيجة عدم تحقق الشرط.

- نظرية لاغرانج (القيمة المتوسطة):

نفرض أن الدالة $y = f(x)$ المعرفة والمستمرة على المجال $[a,b]$ والقابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ وكانت تحقق:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

شروط لاغرانج:

1) $a \neq b$

2) $f(a) \neq f(b)$

عندئذٍ يوجد $c \in]a,b[$ وتكون $|f'(x)|_c$

مثال: هل يمكن تطبيق نظرية لاغرانج للدالة التالية، إذا أمكن ذلك أوجد قيم $c \in]a,b[$

$f(x) = \ln x \quad ; \quad [1,e]$

الحل:

1) $a \neq b$

2) $\ln(1) = 0 \ , \ \ln(e) = 1 \Rightarrow f(1) \neq f(e)$

من الشرط:

$$\frac{1}{x} = \frac{1-0}{e-1}$$

$$\Rightarrow e-1 = x \Rightarrow x|_c \approx 2.7 - 1 \approx 1.7$$

$$\Rightarrow c = 1.7 \in]1,e[$$

- نظرية كوشي: (القيمة المتوسطة العامة):

نفرض أن الدالتين: $y_1 = f(x) \ , \ y_2 = g(x)$

المعرفتين والمستمرتين على المجال $[a,b]$ والقابلتين للاشتقاق على المجال $]a,b[$ وكانت $g(a) \neq g(b)$ وتحقق الشرط:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

عندئذٍ يوجد قيم $c \in]a,b[$

مثال: هل يمكن تطبيق نظرية كوشي للدالتين التي تنتمي إلى المجال $[1,4]$

$f(x) = x^2 \ , \ g(x) = \sqrt{x}$

إذا أمكن ذلك، أوجد القيم التي تنتمي إلى المجال $]1,4[$

الحل: من شرط كوشي:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\Big|_c = \frac{16-1}{2-1} = 15$$

$$\Rightarrow 4x^{\frac{3}{2}} = 15 \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4} = 3.75$$

$$x|_c = (3.75)^{\frac{2}{3}} = 2.41 \in]1,4[$$

- قاعدة لوبيتال:

من نظرية كوشي العامة: نفرض $x_0 \in]a,b[$ وانطلاقاً من شرط كوشي ينتج:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

أخذ النهاية للطرفين:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وكانت: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

عندئذ يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال في حساب النهاية:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وبنفس الطريقة يمكن تطبيق نظرية لوبيتال ... :

- نتيجة: اذا طبقنا نظرية لوبيتال وظهرت حالة عدم تعين مرة أخرى نطبق القاعدة مرة ثانية وهكذا حتى تزول حالة عدم التعين.

مثال: احسب نهاية الدالة التالية:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cdot\cos x}{x - \sin x} = \frac{0}{0}$$

يمكن حلها بالطرق الحسابية لكن نفضل بطريقة لوبيتال

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-(\cos x - x\sin x)}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x + x\sin x}{1-\cos x} = \frac{0}{0}$$

نطبق القاعدة مرة ثانية

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x + \sin x + x\cos x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{2\sin x + x\cos x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

نطبق القاعدة مرة ثالثة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x + \cos x - x\sin x}{\cos x}\Big|_{x\to 0} = 3$$

- الحالة الرابعة والحالة السادسة:

$$1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0},\ 0\times\infty$$

أ) $0\times\infty$: نحول هذا الشكل إلى حالة كسر حتى نستطيع تطبيق قاعدة لوبتال:

مثال: احسب نهاية الدالة: $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0\times\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

حسب قاعدة لوبتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} -x = 0$$

- الحالات المتبقية $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين فتتحول إلى الحالة $0\times\infty$

ثم نأخذ معكوس إحدى الدالتين.

مثال: احسب نهاية الدالة الآتية:

$$y = \lim_{x\to 0} x^{x} = 0^{0}$$

0^{0} حالة يتم تعيين نأخذ لوغاريتم الطرفين

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\ln y = \ln x^{x} = x \ln x$$

نأخذ مقلوب إحدى البسطين:

$$\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

بأخذ النهاية

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \infty \Rightarrow y = e^{\infty} = 1$$

مثال: أحسب نهاية الدالة:

$$y = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$$

الحل: ∞^{0} حالة عدم تعين نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln y = \tan x \left(\ln \left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 \cdot \infty$$

$$\tan x (\ln 1 - \ln x) = \tan x \cdot \ln x = 0 \times \infty$$

نأخذ مقلوب إحدى البسطين:

$$\frac{-\ln x}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{-\ln x}{\cot x} = \frac{\infty}{\infty}$$

حسب لوبتال

$$\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin x}} = \frac{\sin^2 x}{x}$$

حيث عدم تعين نأخذ لوبتال مرة أخرى

$$\frac{2 \cos x \cdot \sin x}{1} = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = e^{0} = 1$$

- التفاضل:

- المفهوم الهندسي للتفاضل:

إذا أعطينا الدالة y تزايد مقداره Δx فينتج عن ذلك التزايد مقدار Δy:

$$y + \Delta x = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

بأخذ النهاية للطرفين

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad \text{أي} \quad dy = y' \cdot dx$$

نتيجة: أن جميع نظريات وخواص الاشتقاق تنطبق تماماً على التفاضل والعكس صحيح من الشكل وليس بالوظيفة.

مثال: أوجد تفاضل الدالة الآتية:

$y_1 = \arcsin x \quad , \quad y_2 = \operatorname{arc\,th} x$

الحل:

$$dy_1 = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad dy_2 = \frac{dx}{1-x^2}$$

أما التفاضل من المراتب العليا:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

$$d^2y = y'' \cdot dx^2$$

مثال: أوجد التفاضل من المرتبة الثانية للدالة:

$$y = x - \sin x$$

$$dy = (1 - \cos x) \cdot dx$$

$$d^2y = \sin x \cdot dx^2$$

وهكذا من المرتبة n:

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^n} = y^{(n)}$$

أي $d^{(n)}y = y^{(n)} \cdot dx^n$

هذا التفاضل من المرتبة n

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$ إذا كان التمثيل الوسيطي

$x = a\cos t$

$y = b\sin t$

حيث $a, b = constant$ ثوابت

$dy = b\cos t\, dt$

$dx = -a\sin t\, dt$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة