كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة :الخامسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

(2) رياضيات عامة — المحاضرة (4) عملي

18/12/2025

ب- التكاملات الكسرية

$$I_1 = \int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$$

نقسم على أمثال x^2

$$I_1 = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}}$$

بإتمام المربع كما

$$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3} = x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{4}{3}$$

$$= (x-\tfrac{1}{3})^2+\frac{11}{9} = \frac{(3x-1)^2}{9}+\frac{11}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\left[(3x-1)^2+11\right]$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\frac{1}{9}\left[(3x-1)^2+11\right]} = 3\int \frac{dx}{(3x-1)^2+11} = \frac{3}{11}\int \frac{dx}{\frac{(3x-1)^2}{11}+1}$$

بوضع $t = \frac{3x-1}{\sqrt{11}}$ نجد $dt = \frac{3}{\sqrt{11}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{11}}{3}dt$

$$I_1 = \frac{3}{11}\int \frac{\frac{\sqrt{11}}{3}dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{11}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{11}}\arctg(t)+c$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\arctg\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right)+c$$

$$I_2 = \int \frac{x^4+1}{x(x^2-1)}dx$$

$$\frac{x^4+1}{x(x^2-1)} = \frac{x^4+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

لتعيين A نضرب الطرفين بـ x ، نجعل $x \to 0$ نجد $\boxed{A=-1}$ ، لتعيين B نضرب الطرفين بالمقدار $(x-1)$ ونعوض $x=1$ نجد $\boxed{B=1}$ ، لتعيين C نضرب الطرفين بـ $(x+1)$ ونجعل $x=-1$ نجد: $\boxed{C=1}$

$$I_2 = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| + C$$

$$I_3 = \int \frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3}\,dx$$

$$\frac{5x^2-20x+17}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

نوحد المقامات ثم حذفها نجد:

$$5x^2-20x+17 = A(x-2)^2 + B(x-2) + C$$

$$= Ax^2 + (B-4A)x + 4A - 2B + C$$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} A = 5 \Rightarrow \boxed{A=5} \\ B-4A = -20 \Rightarrow B = -20+4A \\ \qquad = -20+20 = 0 \Rightarrow \boxed{B=0} \\ 4A-2B+C = 17 \Rightarrow 4(5)-2(0)+C=17 \\ \qquad \Rightarrow 20-0+C=17 \\ \qquad \boxed{C=-3} \end{cases}$$

$$I_3 = 5\int \frac{dx}{x-2} - 3\int \frac{dx}{(x-2)^3}$$

$$= 5\int \frac{dx}{x-2} - 3\int (x-2)^{-3}\,dx$$

$$I_3 = 5\ln|x-2| + \frac{3}{2}(x-2)^{-2} + C = 5\ln|x-2| + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-2)^2} + C$$

$$I_4 = \int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

نوحد المقامات ثم حذفها نجد:

بالتحليل (مميزه Δ سالب تماما)

$$x = A(x^2+1) + (Mx+N)(x+1)$$

$$x = (A+M)x^2 + (M+N)x + A + N$$

$$\begin{cases} A+M=0 & \Rightarrow M=-A \\ A M+N=1 & \\ A+N=0 & \Rightarrow N=-A \end{cases}$$

بالطابقة نجد: $M+N=-A-A=1$

$-2A=1 \Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow M=N=\frac{1}{2}$

$$I_4=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctg(x)+c$$

التكامل المحدد: احسب التكاملات الآتية

$$I_1=\int_1^e\frac{\sin(\ln(x))}{x}dx$$

نفرض $\ln(x)=t \Leftrightarrow x=e^t$

$\frac{dx}{x}=dt \Leftarrow dx=x.dt \Leftarrow dx=e^t.dt$

$x=1 \Leftarrow t=0$

$x=e \Leftarrow t=1$

$$I_1=\int_0^1\frac{\sin(t)}{e^t}e^t.dt=\int_0^1\sin(t).dt=\left[-\cos t\right]_0^1$$

$$=-\cos(1)+\cos(0)=1-\cos(1)$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$$

تكامل بالتجزئة

نفرض $u=x \Leftarrow du=dx$

$v=\tg x \Leftarrow dv=\frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I_2=\left[x.\tg x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tg(x).dx$$

$$I_2 = \left[x \cdot \operatorname{tg} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$= \left[x \cdot \operatorname{tg} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}\underbrace{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}_{=1} - 0\cdot\underbrace{\operatorname{tg}(0)}_{=0}\right] + \left[\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos(0)|\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$$

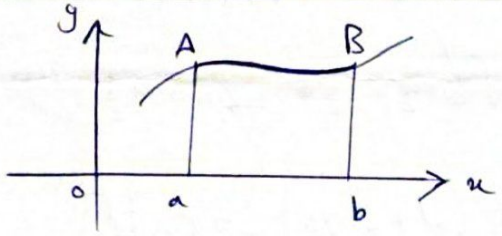
$dx = \frac{dt}{t} \leftarrow x = \ln t \Leftrightarrow e^x = t$ نجد

$x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = e^1 = e \Rightarrow I_3 = \int_1^e \frac{t}{1+t^2} \times \frac{dt}{t}$

$$I_3 = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \left[\operatorname{arctg}(t)\right]_1^e = \operatorname{arctg}(e) - \operatorname{arctg}(1)$$

$$= \operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{4}$$



حساب طول منحنى $y=f(x)$

1 المنحنى معطى ديكارتياً

يحسب طول قوس المنحنى AB بالعلاقة

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,.dx = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,.dx$$

2 المنحنى معطى وسيطياً بالعلاقات

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} : t_1 \le t \le t_2$$

$x(t_1)=a$ ، $x(t_2)=b$

عندئذ يعطى طول القوس AB بالعلاقة

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,.dt$$

مثال (1) : احسب طول قوس المنحنى المعطى بالمعادلة

الآتية : $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ، واقع في المجال $[0,8]$

$$L = \int_0^8 \sqrt{1+y'^2}\,dx \quad , \quad y' = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$L = \int_0^8 \sqrt{1+x}\,.dx = \int_0^8 (1+x)^{\frac{1}{2}}.dx$$

$$= \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^8 = \frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{2}{3}\left[(9)^{\frac{3}{2}}-1\right] = \frac{52}{3}$$

وحدة طول

مثال : احسب طول منحنى السيكلوئيد المعين بالمعادلتين

$$x = a(t-\sin t) \qquad y = a(1-\cos t) \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

الحل : بالاشتقاق بالنسبة لـ t نجد :

$$x' = a(1-\cos t) \qquad y' = a\sin t$$

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1+\cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t}$$

$$= a\sqrt{2-2\cos t} = a\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2+y'^2}\,.dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,.dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2a\,[2+2] = 8a$$

وحدة طول

حساب حجم مجسم دوراني

إن حجم الجسم الناتج عن دوران سطح مستوٍ محدود بالمنحني $y=f(x)$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ حول المحور (ox) يعطى بالعلاقة:

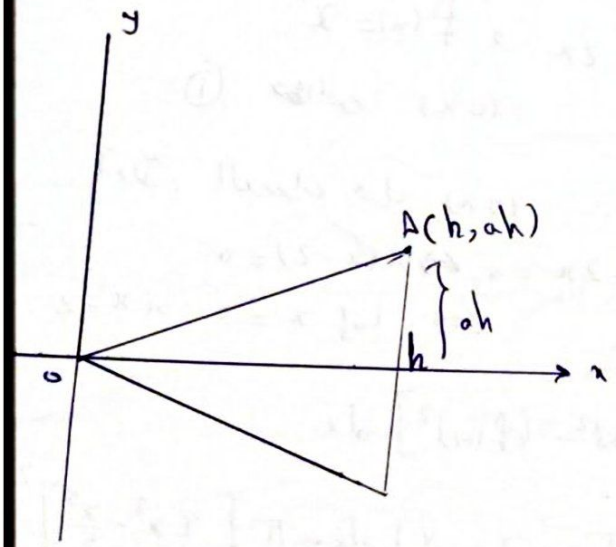
$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b (f(x))^2.dx$$

حيث πy^2 مساحة مقطع الجسم (المقطع دائرة) بمستوٍ يوازي (oy)

مثل إن حجم الجسم الناتج عن الدوران حول (oy) للسطح المحدود بالمنحني $x=\varphi(y)$ والمستقيمين $y=\alpha$ و $y=\beta$ يعطى بالعلاقة

$$V=\pi\int_\alpha^\beta x^2dy=\pi\int_\alpha^\beta (\varphi(y))^2dy$$

مثال ① احسب حجم المخروط الناتج عن دوران المستقيم $y=ax$ حول المحور (ox)



نأخذ نقطة من المستقيم ذا طاقة h فيكون ترتيبها $y=ah=R$ لدوران المستقيم حول (ox) نحصل على مخروط دوراني ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته $R=ah$

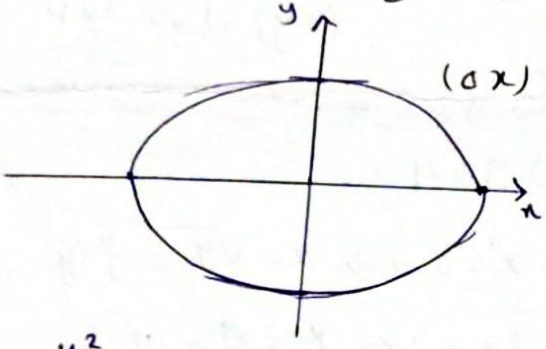
$$V=\pi\int_0^h y^2.dx$$

$$=\pi\int_0^h (ax)^2.dx=\pi a^2\int_0^h x^2.dx$$

$$=\pi a^2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi a^2\left[h^3-0\right]$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^2h^3=\frac{1}{3}\pi(ah)^2.h=\frac{1}{3}\pi R^2.h$$

② احسب حجم المجسم الدوراني الذي يولده دوران القطع الناقص :



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ حول المحور (ox)

القطع الناقص متناظر بالنسبة للمحور (oy) وبالتالي

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 . dx$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$V = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(\frac{2}{3}a^3\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2$$